

Programme de Topologie generale

Chap 1) Espaces metriques - Espaces Topologiques

Chap 2) Connexité

Chap 3) Compacité

Chap 4) Espaces vectoriels normés

Chap 5) Espaces metriques complets

Chap 6) Espaces de fonctions continues

Chap 7) Espaces de Hilbert

Chap 1) Espaces métriques - Espaces topologiques

Dans ce chapitre nous présenterons toutes les notions de base de la topologie. Nous dégagerons les structures qui permettent de parler de limite et de continuité. L'exemple fondamental déjà étudié est le cas de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$. La théorie générale de la topologie englobe bien sur cet exemple mais conduit souvent à des situations moins intuitives.

1) Espaces métriques

1.1. Définitions

Soit X un ensemble, une distance sur X est une application $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x, y, z \in X$

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

Définition 2

Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X .

Définition 3

Soit (X, d) un espace métrique et soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble

$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\} \text{ resp } B_f(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}$$

1.2) Parties bornées. Fonctions bornées

Définition 4

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$ i.e. $\forall x \in A, d(x, x_0) \leq r$

Remarque 1.5

- $0 < r < r', B(x, r) \subset B_f(x, r) \subset B(x, r')$
- On peut remplacer l'adjectif fermé par ouvert. De plus l'inégalité triangulaire implique que le caractère borné de A ne dépend pas du choix de x_0

Définition 1.6

Soit X un ensemble non vide et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une fonction $f: X \rightarrow Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée. On note $\mathcal{F}_b(X, Y)$.

Exercice 1.7

Soit $X = \mathbb{R}^n$. Montrer les applications suivantes sont dans $\mathcal{F}_b(X, Y)$
les distances $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Distance de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(X, Y)$

Soit (Y, d) un espace métrique et X un ensemble. Montrer que $\forall f, g \in \mathcal{F}_b(X, Y)$ $\delta(f, g) = \sup_{x \in X} (d(f(x), g(x)))$ est une distance

1.3 / Distance entre deux parties diamètre

Définition 1.8

Soit (X, d) un espace métrique et soit A et B deux

parties de X . On appelle distance entre A et B la quantité définie par $d(A, B) = \inf \{ d(x, y), x \in A \text{ et } y \in B \}$ c'est l'infimum entre les points de A et de B .

Definition 1.9

On appelle diamètre d'une partie A de X et on note $\text{Diam}(A) = \sup \{ d(x, y), x, y \in A \}$

2.1 Espaces topologiques

Quand on aborde les problèmes de convergence, on s'aperçoit que la notion de norme et de distance est restrictive. si on prend la suite de fonction $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$, on a bien envie de dire qu'elle converge vers 0 puisqu'en tout point de $\mathbb{R}$, cette convergence est vérifiée.

Cependant, il n'y a pas de distance évidente que l'on puisse mettre pour exprimer cette convergence.

En effet l'écart mesuré globalement sur la droite réelle entre deux termes de la suite est toujours infini. C'est ainsi que les mathématiciens du 18^e et du 19^e siècles ont dégagé la structure d'espace topologique qui contient de façon abstraite toutes les hypothèses nécessaires à l'étude de la convergence et de la continuité.

2.1.1 Définitions-Propositions

Definition 2.1

On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{O})$ où X est un ensemble non vide et $\mathcal{O}$ une famille de parties de X vérifiant

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

(ii) l'intersection fini d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore un élément

de $\mathcal{O}$

(iii) Toute réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore élément de $\mathcal{O}$

Soit $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Definition 2.2

si $\mathcal{O}$ est une topologie alors les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés ouverts

Definition 2.3

soit (X, d) un espace métrique. On appelle ouvert de (X, d) toute partie O de X qui vérifie et non vide :
 $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O$

Proposition 2.4

Une boule ouverte est un ouvert. En effet, soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de (X, d) et soit $x \in B(x_0, r_0)$, on a $d(x, x_0) < r_0$. Posons $\rho = \frac{r_0 - d(x, x_0)}{2}$ alors la boule $B(x, \rho) \subset B(x_0, r_0)$ car $\forall y \in B(x, \rho)$ on a $d(x_0, y) < d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \frac{r_0 - d(x_0, x)}{2} = \frac{d(x_0, x) + r_0}{2} < r_0$
 $\Rightarrow d(x_0, y) < r_0$ d'où $B(x, \rho) \subset B(x_0, r_0)$

Definition 2.5

Dans un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ on appelle fermé toute partie de X dont le complémentaire est un ouvert. On note $\mathcal{F}$ la famille de toutes les fermés. Ainsi $F \in \mathcal{F} \iff F^c \in \mathcal{O}$

Remarque 2.6

La famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés vérifie

(a) $\emptyset$ et X sont des fermés.

(b) Toute intersection quelconque de fermés est un fermé

(c) Toute réunion finie de fermés est un fermé

Exercice 2.7

Dans un espace métrique (X, d) toute boule fermée est un fermé

Exemple 2.8

• Les espaces métriques et les espaces vectoriels normés sont des espaces topologiques

• La topologie discrète : $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$, tous les sous-ensembles de X sont des ouverts. C'est la topologie qui a le plus d'ouverts possibles.

• Topologie grossière $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$. C'est la topologie qui a le moins d'ouverts possibles

Remarque 2.9

On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ définie sur un ensemble X est métrisable si on peut trouver une distance d sur X qui donne la topologie $\mathcal{T}$

Exemple : $X = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{O}_1 = \{X, \emptyset\}$$

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{P}(X)$$

$$\mathcal{O}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\mathcal{O}_4 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

2.2. Voisinages

Definition 2.10

Soit (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. On appelle voisinage de x dans X toute partie de X contenant un ouvert contenant x . On note $V(x) = V_x$ l'ensemble des voisinages de x .

$$V(x) = V_x = \{V \in \mathcal{P}(X), \exists O \in \tau, x \in O \subset V\}$$

Proposition 2.11

Si (X, d) est un espace métrique et $x \in X$, on a :

$$V_x = \{V \in \mathcal{P}(X), \exists r > 0, B(x, r) \subset V\}$$

En effet soit $V \in V_x \Rightarrow \exists O \in \tau, x \in O \subset V$

$$\Rightarrow \exists r > 0, B(x, r) \subset O \text{ car } B(x, r) \subset V \Rightarrow x \in \underbrace{B(x, r)}_O \subset V$$

Proposition 2.12

Soit (X, τ) un espace topologique. Un sous-ensemble O de X est un ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points i.e. $(O \in \tau) \Leftrightarrow (\forall x \in O, O \in V_x) \Rightarrow \forall x \in O, \exists O_x \in \tau, x \in O_x \subset O$ donc $O \in \tau$.

$\Leftarrow$ réciproquement, si O est voisinage de chacun de ses points, alors $\forall x \in O, \exists W_x \in \tau, x \in W_x \subset O$.

On note $W_x = \bigcup_{x \in W \subset O} W$

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} W_x \subset O \text{ par conséquent}$$

$$O = \bigcup_{x \in O} W_x = \bigcup_{x \in O} \left(\bigcup_{W \in \tau, x \in W \subset O} W \right)$$

O est un ouvert comme réunion quelconque d'ouverts.

Intersection finie de voisinage est un voisinage.

Proposition 2.13

La famille $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ de tous les voisinages de x vérifie

- (i) si $V \in \mathcal{V}_x$ alors $x \in V$
- (ii) si $V \in \mathcal{V}_x$ et $V \subset A$ alors $A \in \mathcal{V}_x$.
- (iii) toute intersection finie de voisinage de $x \in X$ est un voisinage de x
- (iv) si $V \in \mathcal{V}_x, \exists W \in \mathcal{V}_x$ tq $W \subset V$ et W est voisinage de chacun de ses points.

Dans les espaces métriques, si les ouverts ne sont pas aisément identifiables, on décrit en revanche simplement les boules ouvertes et on voit que tout ouvert s'écrit comme une réunion de boules ouvertes. Cette situation est en fait générale. Il est souvent plus facile de décrire certains ouverts particuliers qui engendrent l'ensemble de tous les ouverts par réunion quelconque et intersection finie, d'où la définition suivante

Définition 2.14

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, on dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouvert est une base d'ouvert de $(X, \mathcal{T})$ si tout ouvert $O \in \mathcal{T}$ s'écrit comme une réunion quelconque d'intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$.

On notera qu'au niveau ensembliste, une intersection finie d'union peut s'écrire comme une union d'intersection finie

Définition 2.15

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$ est une base des voisinages de x si tout voisinage V de x contient un élément W de $\mathcal{B}_x$

Definition 2.16

On dit qu'un espace topologique est localement fini si admet en tout point une base de voisinage.

Exemple 2.17

si (X, d) est un espace métrique
• Tout point x de X admet une base dénombrable de voisinage $B(x) = \{B(x, \frac{1}{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, ainsi $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n+1}), x \in X\}$ est une base d'ouvert de (X, d) .

2.3 / Sous espaces topologiques

Definition 2.18

soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$. On appelle topologie induite par $\mathcal{O}$ sur A la topologie notée $\mathcal{O}_A$ dont la famille des ouverts $\mathcal{O}_A = \{O \cap A, O \in \mathcal{O}\}$.
On dit que $(A, \mathcal{O}_A)$ est un sous espace topologique de $(X, \mathcal{O})$.

On appelle $O \cap A$ la trace de l'ouvert O sur A .

Remarque 2.19

- Les fermés de la topologie $\mathcal{O}_A$ sont des traces des fermés de la topologie $\mathcal{O}$. $\mathcal{F}_A = \{F \cap A, F \in \mathcal{F}\}$
- Pour tout point $x \in A$, les voisinages de x pour la topologie $\mathcal{O}_A$ sont des traces des voisinages de x pour la topologie $\mathcal{O}$. $\mathcal{V}_A(x) = \{V \cap A, V \in \mathcal{V}_x\} \quad \forall x \in A$.

Définition 2.20

si (X, d) est un espace métrique, et A un sous ensemble de X , on dit que le couple (A, d_A) est un sous espace métrique de couple (X, d) si $d_A = d|_{A \times A}$.

ie $d_A(x, y) = d(x, y) \forall x, y \in A$.

Cette restriction définit bien une distance

2.4 Adhérence, Intérieur et Frontière

soit $(X, \mathcal{O})$ une topologie.

• Adhérence

Definition 2.21

Soit A une partie de X et $x \in X$, on dit que :

- x est adhérent à A si tout voisinage V de x rencontre dans X contient au moins un point de A

$$\forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap A \neq \emptyset$$

- x est un point d'accumulation de A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A différent de x .

- x est un point isolé de A s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$

Definition 2.22

Pour une partie A de X , on appelle adhérence de A et on note

$\bar{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A .

$$\bar{A} = \{x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap A \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \in X, \exists V \in \mathcal{V}_x, V \cap A = \emptyset\}^c$$

Proposition 2.23

L'adhérence $\bar{A}$ d'une partie A de X est le plus petit fermé de X contenant A . En effet, en utilisant la définition ensembliste de $\bar{A}$,

$$\bar{A} = \{x \in X, \exists O \in \mathcal{V}_x, O \cap A = \emptyset\}^c = \left(\bigcup_{O \in \mathcal{O}, O \cap A = \emptyset} O \right)^c$$

$$= \bigcap_{O \in \mathcal{O}, O \cap A = \emptyset} O^c = \bigcap_{O \in \mathcal{O}, O \cap A = \emptyset} F \quad \text{avec } O^c = F \quad = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \cap F = \emptyset} F$$

$\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subset F} F$ est le plus petit fermé contenant A .

Remarque 2.24

- Une partie A de X est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.
- Si A et B sont deux parties de X , alors

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

Exemple 2.25

Dans $\mathbb{R}$, prenons $A = [0, 1[$, $B =]1, 2]$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\overline{A \cap B} = \emptyset$$

$$\bar{A} = [0, 1]$$

$$\bar{B} = [1, 2]$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$$

Définition 2.26

Une partie A de X est dite dense si $\bar{A} = X$.

Définition 2.27

On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.

• Intérieur

Def 2.28

Soit $A \subset X$. On dit qu'un point $x \in A$ est intérieur à A si A est un voisinage de x dans X i.e. $A \in \mathcal{V}_x$.

On appelle intérieur d'une partie A de X et on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A .

Prop 2.25

L'intérieur d'une partie A de X est le plus grand ouvert contenu dans A .

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}, O \subset A} O$$

En effet l'intérieur de A s'écrit :

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A, \exists V_x \subset A\}$$

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A, \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset A\}$$

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}, O \subset A} O$$

et comme c'est réunion alors c'est le plus grand O .

Remarque 2.2.10

Une partie A de X est ouvert si et seulement si

$$A = \overset{\circ}{A}$$

• Frontière

Def 2.2.11

On appelle frontière d'une partie A de X l'ensemble noté $Fr(A)$ défini par $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ ou $\overset{\circ}{A}^c$

Exemple 2.2.12

Soit X un ensemble non vide muni de la distance triviale (topologie discrète)

$$\left(\text{distance triviale} = \begin{cases} d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y \\ d(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \right)$$

$$\text{On a } \overline{B(x, 1)} = \{x\} = \{x\}.$$

$$B_p(x, 1) = X$$

$$\overline{B(x, 1)} = \{n\}$$

$$\text{Fr}(B(x, 1)) = \overline{B(x, 1)} \setminus \overset{\circ}{B(x, 1)} = \emptyset$$

2.5. Limites

• Limite d'une suite

Def 2.2.13

Soit (X, T) un espace topologique, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $l \in X$. On dit que l est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\forall V \in \mathcal{V}_l$ dans X il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans V , i.e. $\forall V \in \mathcal{V}_l, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in V$

Remarque 2.2.14

Soit (X, d) est un espace métrique. On dit que l est une limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, l) < \varepsilon.$$

• Espace topologique séparé et unicité de limite.

Def 2.2.15

On dit qu'un espace topologique (X, T) est séparé si $\forall (x, y) \in X$ distincts ($x \neq y$), il existe $V \in \mathcal{V}_x$ et $W = V_y$ tel que $V \cap W = \emptyset$ i.e. $(x, y) \in X, \exists V \in \mathcal{V}_x$ et $W = V_y, V \cap W = \emptyset$

On dit aussi que la topologie T sépare les points de X

Proposition 2.2.16

Un espace métrique est séparé.

En effet, soit (X, d) un espace métrique. Soit (x, y) deux points distincts de X . Posons $r = d(x, y) > 0$.

$V = B(x, \frac{r}{3})$ et $W = B(y, \frac{r}{3})$. Il reste à montrer que $V \cap W = \emptyset$.

Si on a $z \in V \cap W$ alors on a

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3} \Rightarrow$$

$r < \frac{2r}{3}$ impossible, donc il n'existe pas de $z \in V \cap W$ par conséquent (X, d) est séparé.

Proposition 2.2.17

Si (X, τ) est un espace topologique séparé, alors toute suite (x_n) a au plus une limite. Si une telle limite $l \in X$ existe, on dit que l est la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve

Supposons (x_n) admet deux limites distinctes $l_1 \neq l_2$. Comme (X, τ) est séparé $\exists V_1 \in \mathcal{V}_{l_1}$ et $V_2 \in \mathcal{V}_{l_2}$.

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

D'après la définition 2.2.13, $\exists m$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, t.p.
 $\forall n \geq m, x_n \in V_1$, $(\forall n \geq m, x_n \in V_1)$ et $(\forall n \geq n_2, x_n \in V_2)$.
Posons $n_0 = \max(m, n_2)$, $\forall n \geq n_0, x_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$
absurde d'où l'unicité de la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique séparé.

Exemple: la topologie grossière n'est pas séparée.

• Limite et adhérence

Proposition 2.2.18

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie A de X et $\forall x \in X$, on a:

- (i) $x \in \bar{A}$ est équivalent à
- (ii) $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ dont la limite est x .

Preuve

* $i \Rightarrow ii$

Soit $x \in \bar{A}$. Utilisons le fait que dans un espace métrique tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinage.

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_V(x) = \left\{ B_n = B\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, x \in \bar{A}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\exists x_n \in A \cap B_n$

$$\exists x_n \in A \cap B_n.$$

La suite x_n ainsi définie est une suite de points de A et elle converge vers x quand $n \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

$$x_1 = B(x, 1) = B_1$$

$$x_2 = B(x, \frac{1}{2}) = B_2$$

...

$$x_n = B(x, \frac{1}{n}) = B_n$$

* $ii \Rightarrow i$

Si $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ alors $\forall V \in \mathcal{V}_x$

$\exists n_v$ tel que $n \geq n_v$ alors $x_n \in V$, ainsi pour tout voisinage V de x dans X , on a trouvé un élément $x_{n_v} \in A \cap V$ puisque tous les x_n sont d'abord dans $A \cap V$ donc $\forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap A \neq \emptyset$ donc $x \in \bar{A}$

• Limite d'une fonction

Def 2.2.19

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $f \in \mathcal{F}(X, X')$. Soit A une partie non vide de X et soit $a \in \bar{A}$. On dit que $l \in X'$ est limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow a$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$) si $\forall V' \in \mathcal{V}_l$, il existe $V \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(A \cap V) \subset V'$.
Si $(X', \mathcal{T}')$ est séparé alors cette limite est unique et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
 $x \rightarrow a$
 $x \in A$

Remarque 2.2.20

Avec les notations de la définition 2.2.19, la limite l est dans l'adhérence de l'image de A ie tout voisinage de l rencontre $f(A)$

Proposition 2.2.19

Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in \bar{A}$ et $f \in \mathcal{F}(X, X')$. On a les équivalences suivantes

(i) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = l \in X'$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \text{ on a } (d(x, a) < \alpha) \Rightarrow (d'(f(x), l) < \varepsilon)$

Pour la preuve, il suffit de remplacer les voisinages par les boules

3. Continuité

3.1 Continuité en un point

Définition 3.1

Soit $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $a \in X$. On dit qu'une fonction $f: X \rightarrow X'$ est continue au point a si l'image réciproque f^{-1} de $f^{-1}(V')$ de voisinage V' de

$f(a)$ est un voisinage de a , autrement dit

$\forall V' \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V') \in \mathcal{V}_a$ ou bien

$\forall O' \in \mathcal{T}, f(a) \in O' \exists O \in \mathcal{T}, a \in O$ et $f(O) \subset O'$

Proposition 3.2

Une application $f: X \rightarrow X'$ est continue au point a si et seulement si $f(a)$ est limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow a$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$)

En effet, si $X = A$ et en utilisant la définition de $f(a)$ quand $x \rightarrow a$. On a que $\forall V'$ de $f(a)$, $f^{-1}(V')$ contient $V = V \cap A$ qui est un voisinage de a . Par conséquent $f^{-1}(V')$ est un voisinage de a .

Remarque 3.3

Si (X, d) et (X', d') sont des espaces métriques, si $a \in X$ et $f \in \mathcal{F}(X, X')$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue au point a
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
- (iii) Continuité séquentielle en a : $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$, convergente vers a , la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in X'$ converge vers $f(a)$.

3.2.1 Propriétés

Proposition 3.4

Soit $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$, $(X'', \mathcal{T}'')$ trois espaces topologiques. Si la fonction $f: X \rightarrow X'$ est continue en $a \in X$ et si $g: X' \rightarrow X''$ est continue en $f(a) \in X'$ alors $g \circ f$ est continue en a .

En effet $g \circ f: X \rightarrow X''$. Soit $V'' \in \mathcal{T}''$ dans X'' alors comme g est continue dans $f(a)$, $g^{-1}(V'')$ est un voisinage de $f(a)$. Comme f est continue en a , $f^{-1}(g^{-1}(V'')) = (g \circ f)^{-1}(V'') \in \mathcal{T}_a$.

Def 3.5

Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f: X \rightarrow X'$ est continue sur X si elle est continue en tout point de X . On note $C^0(X, X')$ l'ensemble de toutes les fonctions définies de X dans X' et continues.

Prop 3.6

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f \in \mathcal{F}(X, X')$, les assertions suivantes sont équivalentes

- (a) f est continue sur X
- (b) L'image réciproque de tout ouvert de X' est un ouvert de X i.e. $\forall \mathcal{O}' \in \mathcal{T}', f^{-1}(\mathcal{O}') \in \mathcal{T}$
- (c) L'image réciproque de tout fermé de X' est un fermé de X i.e. $\forall F' \in \mathcal{F}', f^{-1}(F') \in \mathcal{F}$

Preuve

(a) $\Rightarrow$ (b)

Si $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}'$ alors $\mathcal{O}'$ est voisinage de chacun de ses points. f étant continue, alors $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est voisinage de chacun de ses points donc est un ouvert de X .

(b) $\Rightarrow$ (a)

Montrons que $\forall x \in X, V' \in \mathcal{V}_{f(x)}'$ entraîne que $f^{-1}(V') \in \mathcal{V}_x$. Soit V' un voisinage de $f(x)$ alors $\exists \mathcal{O}' \in \mathcal{T}'$; $f(x) \in \mathcal{O}' \subset V'$. On a alors $x \in f^{-1}(\mathcal{O}') \subset f^{-1}(V')$. Par hypothèse, $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de X et $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x .

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

$$(\forall \mathcal{O}' \in \mathcal{T}', f^{-1}(\mathcal{O}') \in \mathcal{T}) \Leftrightarrow (\forall \mathcal{O}' \in \mathcal{T}', f^{-1}(\mathcal{O}')^c \in \mathcal{F}) \\ \Leftrightarrow (\forall F' \in \mathcal{F}', F' \in \mathcal{F})$$

3.3) Homéomorphisme

Définition 3.7

Sont $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On appelle homéomorphismes toute injection f de X sur X' continue et si f et f^{-1} sont continues. Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image de tout ouvert respectivement fermé est un ouvert respectivement fermé. Ainsi un homéomorphisme établit une bijection en $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

Déf 3.8

S'il existe un homéomorphisme de $(X, \mathcal{T})$ sur $(X', \mathcal{T}')$, on dit que $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont homéomorphes.

Prop 3.9

Deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sur un même ensemble X sont égales ssi l'application identité ($Id: X \rightarrow X$) est un homéomorphisme de $(X, \mathcal{T})$ sur $(X, \mathcal{T}')$.

En effet, l'image réciproque Id^{-1} donne une bijection entre les éléments de $\mathcal{T}'$ et les éléments de $\mathcal{T}$. Comme $Id^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ cela signifie que les ouverts de $\mathcal{T}'$ sont des ouverts de $\mathcal{T}$ et inversement. Les deux topologies ont donc les mêmes ouverts, elles sont égales.

3.4) Uniforme Continuité

Il s'agit ici d'une notion métrique. Considérons des espaces métriques (X, d) , (X', d') .

La continuité globale d'une fonction $f: X \rightarrow X'$ s'écrit précisément $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall y \in X$
 $(d(x, y) < \delta_\varepsilon) \Rightarrow (d'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$

le α dépend non seulement de ε mais aussi du point x où on teste la continuité.

La continuité uniforme signifie que l'on peut prendre α indépendamment de $x \in X$

Définition 3.10

On dit que $f \in \mathcal{F}(X, X')$ est uniformément continue si elle vérifie $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon, \forall x, y \in X, (d(x, y) < \alpha_\varepsilon) \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

Def 3.11

On dit qu'une fonction $f: X \rightarrow X'$ est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur X si $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$

Remarque 3.12

$(f \text{ lipschitzienne}) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue}) \Rightarrow (f \text{ continue})$

3.5.1 Prolongement par Continuité

soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(X', \mathcal{T}')$ un espace topologique séparé nous donnant ici un résultat d'unicité qui est valable dans la situation générale

Proposition 3.12

si $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ sont deux espaces topologiques et $f: A \rightarrow X'$ une fonction continue de A dans X' , alors il existe au plus une fonction $\bar{f} \in C^0(\bar{A}, X')$, $\bar{A}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}$ dont la restriction à A vaut f , de plus une condition sur f nécessaire à l'existence de $\bar{f}$ est que $\forall a \in \bar{A} \setminus A, \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ existe

Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 continues de $\bar{A} \rightarrow X'$. Comme
 soit $a \in \bar{A}$, $\exists$ il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a , on a alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_i(x) = f_i(a)$.

et cela se traduit en appliquant directement la limite d'une fonction par $\forall V' \in \mathcal{U}_{f_1(a)}, \exists V \in \mathcal{U}_a, f_1(V \cap A) \subset V'$.
 Comme on veut que $f_1|_A = f_2|_A$, cela donne $\forall a \in \bar{A}, \forall V' \in \mathcal{U}_{f_1(a)}, \exists V \in \mathcal{U}_a, f_2(V \cap A) \subset V'$.
 Autrement dit, on doit avoir $f_1(a) = f_2(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$.

Comme $(X', \mathcal{T})$ est séparé, cela entraîne que $f_1(a) = f_2(a)$.
 $\forall a \in \bar{A}$, il y a donc au plus une fonction f continue sur $\bar{A}$ qui prolonge f . En suivant ces raisonnements, on voit la nécessité que f soit continue sur A et f
 $a \in \bar{A} \setminus A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ existe.

Def 3.14

Avec les hypothèses et les notations de la prop 3.13 s'il existe une application $f \in C^0(\bar{A}, X')$ dont la restriction $f|_A$ on appelle f le prolongement par continuité de $f|_A$.

4) Comparaison de topologie - Li France

Deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sur un même ensemble sont identiques si elles ont les mêmes ouverts. On peut en fait mettre une relation d'ordre sur les topologies définies sur un ensemble.

Def 4.1

Sur un ensemble X , on dit que la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}$ a plus d'ouverts que $\mathcal{T}'$ donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$

Exemple 4.2

La topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies et la topologie discrète est la plus fine de toutes les topologies.

Proposition 4.3

Sur un ensemble X , la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}'$ si et seulement si $\text{Id}(X, \mathcal{T}) \rightarrow \text{Id}(X, \mathcal{T}')$ est continu.

En effet on a tout simplement l'équivalence suivante

$$(\forall \mathcal{O}' \in \mathcal{T}', \mathcal{O}' \in \mathcal{T}) \iff (\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}, \text{Id}^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}')$$

Def 4.4

On dit que deux distances d et d' définies sur un ensemble X sont topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie.

On dit que deux distances d et d' sur X sont nettement équivalentes s'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tq $\forall x, y \in X$, $\alpha d(x, y) < d'(x, y) < \beta d(x, y)$

5.1 Topologie Produit.

La définition liée à la topologie produit semble un peu abstraite et peu naturelle. En fait c'est exactement la bonne définition pour que toute les propriétés de continuité relativement inhérente pour les produits finis soit encore vrai pour les produits quelconques. Considérons une famille

$(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ d'espace topologique où I est un ensemble fini non nécessairement fini non nécessairement

Def 5.1

Pour un sous ensemble $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ de I fini (non vide) et pour toute suite d'ouvert W_{i_k} de X_{i_k} , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On appelle cylindre ouvert de base $(W_{i_k})_{k \in \{1, 2, \dots, n\}}$ sous ensemble $\prod_{i \in I} X_i$ donné par

$$\text{Cyl}_{X_i}(W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n}) = \prod_{i \in I} Y_i$$

Def 5.2

On appelle topologie produit sur le produit $\prod_{i \in I} X_i$, la topologie donnée par la base d'ouvert faite de tous les cylindres d'ouverts. $B = \{ \text{Cyl}_{X_i}(W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n}) \mid n \in \mathbb{N}^*, W_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k} \}$

Remarque

- Dans la définition ci-dessus de la base B , on peut se limiter à $n=1$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$ le $\text{Cyl}_{X_i}(W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n})$ peut s'écrire comme l'intersection finie

$$\text{Cyl}_{X_{i_1}}(W_{i_1}) \cap \text{Cyl}_{X_{i_2}}(W_{i_2}) \cap \text{Cyl}_{X_{i_3}}(W_{i_3}) \cap \dots \cap \text{Cyl}_{X_{i_n}}(W_{i_n})$$

- On peut définir une autre topologie sur le produit $\prod_{i \in I} X_i$ appelée parfois topologie des boîtes. Elle est donnée par la base d'ouverts $B = \{ \prod_{i \in I} W_i, W_i \in \mathcal{T}_i \}$

Def 5.4

si $\forall i \in I, (A_i, T_i)$ est un sous-espace topologique de (X_i, T_i) . La topologie induite par $\prod_{i \in I} T_i$ sur $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$ est la topologie produit $\prod_{i \in I} T_i$.

6.1 Topologie quotient

Pour un ensemble X muni d'une relation d'équivalence R l'espace quotient X/R est l'ensemble des classes d'équivalence de R . Il y a une projection naturelle $\pi_R: X \rightarrow X/R$
 $x \mapsto \bar{x}$

Etant donné une topologie T sur X , quelle topologie naturelle peut-on mettre sur X/R . On souhaite en particulier que la projection π_R soit continue et donc pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de cette topologie, $\pi_R^{-1}(\mathcal{O})$ soit un ouvert de T . Cela suffit pour définir une topologie puisque l'image réciproque agit bien sur les opérations ensemblistes.

Def 6.1

Soit (X, T) un espace topologique et R une relation d'équivalence sur X . On appelle **topologie quotient** sur X/R celle donnée par la famille d'ouvert

$$T_R = \{ \mathcal{O}_R \in \mathcal{P}(X/R), \pi_R^{-1}(\mathcal{O}_R) \subset T \}$$

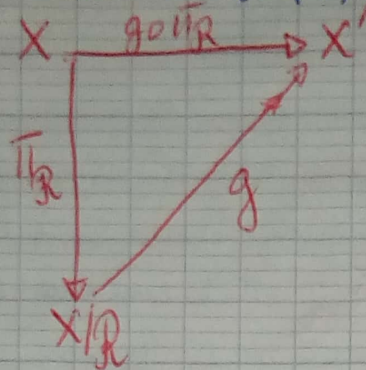
On dit que $(X/R, T_R)$ est un quotient topologique de (X, T)

Remarque 6.2

La topologie quotient T_R est la topologie la plus fine qui rend la projection $\pi_R: X \rightarrow X/R$ continue.

Prop 6.3

Avec les notations ci-dessus, l'application $g: (X/R, T_R) \rightarrow (X', T')$ est continue si $g \circ \pi_R$ est continue de (X, T) dans (X', T')



$\Rightarrow$ g continue alors $g \circ \pi_R$ est continue (transitivité de la continuité)

$\Leftarrow$ Supposons $g \circ \pi_R$ est continue et montrons que g est continue.

$\forall O' \in T'$, l'image réciproque $(g \circ \pi_R)^{-1}(O')$ est un ouvert de T or $(g \circ \pi_R)^{-1}(O') = \pi_R^{-1} g^{-1}(O') \in T$

Par définition des ouverts, $(X/R, T_R), g^{-1}(O')$ est un ouvert donc l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert donc g est continue.

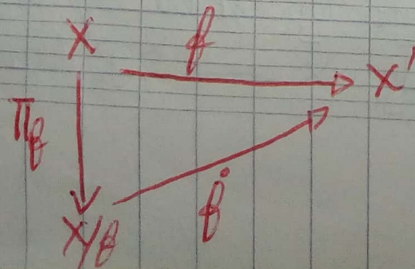
Remarque 6.4

A une application $f: X \rightarrow X'$ on peut associer la relation d'équivalence

$$\forall x, y \in X, (x R_f y) \iff (f(x) = f(y))$$

On note alors X/f l'espace quotient, π_f la projection associée et T_f la topologie quotient.

On a la décomposition canonique $f = \tilde{f} \circ \pi_f$ où $\tilde{f}: X/f \rightarrow X'$ est donné par $\tilde{f}(x) = f(x)$



Prop 6.5 (Exercice)

Soit T_Q une topologie quotient. Pour que T_Q soit séparé il est nécessaire que les classes d'équivalence soient fermées dans (X, T) .

Chap II: Connexité

D'un point de vue intuitif, un espace topologique connexe est un espace topologique fait d'un morceau ie fait d'un seul tenant. Généralement on se demande quelles sont les parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ ou de manière équivalente quelles sont les parties $A \subset \mathbb{R}$ tq (A, A^c) forment une partition. Soit A un tel sous ensemble de $\mathbb{R}$. La fonction caractéristique $\chi_A: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ est continue puisque pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\{0, 1\}$ l'image réciproque $\chi^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset, A, \mathbb{R}, A^c$. Le théorème des valeurs intermédiaires impose alors χ_A est constante sur $\mathbb{R}$ ie $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$.

1.1 Définitions et exemples

Def 1.1

On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$ ie que X n'admet pas de partition non triviale d'ouvert.

On dit qu'une partie A de X est connexe si $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe ($\mathcal{T}_A$ topologie induite).

Prop 1.3

Une partie A de X est connexe si l'existence de deux ouverts disjoints $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, $A \subset O_1 \cup O_2 \Rightarrow A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$. En effet, l'existence des ouverts O_1 et O_2 disjoints de $(X, \mathcal{T})$ tq $A \subset O_1 \cup O_2$ revient à dire que A muni de la topologie $(\mathcal{T}_A)$ admet la partition d'ouvert $(A, \mathcal{T}_A)$ $O_1 \cap A$ et $O_2 \cap A$. La partie A est connexe si $A = O_1 \cap A$ ou $A = O_2 \cap A$.

$$O_1 \cap A = \emptyset$$

Prop 1.4

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

En effet

• Montrons que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont nécessairement des intervalles. Soit A une partie connexe de $\mathbb{R}$.

$x, y \in A$ et $z \in \mathbb{R}$ tq $x < z < y$. Si $z \notin A$ alors $O_1 =]-\infty, z[$, $O_2 =]z, +\infty[$ sont des ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tq $A \subset O_1 \cup O_2 \Rightarrow A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$ ce qui contredit y est dans A ($A \subset O_1$). Par conséquent $z \in A$.

On déduit $\forall x, y \in A$ l'ensemble des $\{z \in \mathbb{R}, \min(x, y) \leq z \leq \max(x, y)\} \subset A$ d'où les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

• Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes. Supposons que pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$ tq $I \subset O_1 \cup O_2$.

Supposons $I \cap O_2 \neq \emptyset$ et montrons qu'alors $I \subset O_2$ et $I \cap O_1 = \emptyset$.

Soit $x \in I \cap O_2$. Considérons $W_x = I \cap O_1 \cap]-\infty, x[$.

Par l'absurde, supposons W_x non vide. Si $W_x \neq \emptyset$, alors il admet une borne supérieure notée a . Cette borne supérieure a est $\leq x$ et majore les éléments de W_x .

Comme $W_x \subset I$, $x \in I$. Comme $W_x \subset I$ et comme I est un intervalle donc $a \in I$. Aussi $a \in I \cap O_2$, en effet dans le cas contraire les relations $a \in I \cap O_1$ et $a \leq x$ avec $x \in O_2$ entraîneraient aussi $a \in W_x$. Comme W_x est un ouvert de I , $\exists \varepsilon > 0$, $\exists a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I \subset W_x$. L'intervalle

I contient A et $x > a + \varepsilon$, par conséquent $a + \varepsilon \in W_x$ et cela contredit la définition de a (borne sup de W_x).

Maintenant, si $a \in O_2$, Comme O_2 est un ouvert, il existe $\varepsilon' > 0$ tel $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\subset O_2$. Comme O_1 et O_2 sont disjoints, on obtient $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\cap W_\alpha = \emptyset$ ce qui est contraire à la définition de a . En conclusion, $W_\alpha = \emptyset$. On a donc $O_1 \cap I = \emptyset$ et $I \subset O_2$.

Prop 1.5

L'image d'un connexe par une application continue est connexe

Preuve

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $(X, \mathcal{T})$ connexe et $f \in C^0(X, X')$ une application continue de X dans X' .
Supposons $f(X)$ non connexe. Alors il existe deux ouverts non vides disjoints O'_1 et O'_2 , $f(X) \subset O'_1 \cup O'_2$ sans que $f(X)$ ne soit contenu dans l'un d'eux. Comme f est continue, cela entraîne que $f^{-1}(O'_1)$ et $f^{-1}(O'_2)$ forment une partition non triviale de X ce qui contredit le fait que X soit connexe. Par conséquent, $f(X)$ est connexe.

Prop 1.6

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexessi toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante. En effet, l'ensemble $\{0, 1\}$ pris comme partie de $\mathbb{R}$ a pour topologie, la topologie discrète

$\Rightarrow$ si $(X, \mathcal{T})$ est connexe, $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue alors $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ est une partition d'ouvert de X i.e. $X \subset f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ et comme X est connexe alors $X \subset f^{-1}(\{0\})$ ou $X \subset f^{-1}(\{1\})$ ce qui revient à dire que $f(X) = 0$ ou $f(X) = 1$ ce qui entraîne que f est constante

4= supposons l'application continue $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est constante. Si A et A^c est une partition d'ouvert de X . Par hypothèse, elle est constante et $A = X$ ou $A = \emptyset$ d'où X est connexe.

Prop 1.7

Toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de partie connexe d'un espace topologique (X, τ) ayant deux à deux une intersection non vide est une réunion connexe.

Preuve

Soit A_i une famille de partie connexe t.q. $\forall i, j \in I, A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 t.q. $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset O_1 \cup O_2$. Pour $i_0 \in I$ fixe, A_{i_0} est connexe et est contenu dans $A \subset O_1 \cup O_2$, cela entraîne $A_{i_0} \subset O_1$ ou $A_{i_0} \subset O_2$. Si $A_{i_0} \subset O_1$, l'hypothèse $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ entraîne $A_i \cap O_1 \neq \emptyset$ tandis que la connexité de A_i donne $A_i \subset O_1 \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subset O_1$. En conclusion A est connexe.

Def 1.8

Soit (X, τ) un espace topologique quelconq, $\forall x \in X$, on appelle **Composante Connexe** de x et on note $C(x)$ ou C_x le plus grand connexe contenant x i.e. $C(x) = \bigcup_{\substack{C \subset X \\ C \text{ connexe} \\ x \in C}} C$

Remarque 1.9

La relation "appartenir à un même connexe" qui se traduit par $C(x) = C(y)$ est une relation d'équivalence.

sont les classes d'équivalence sont les **composantes connexes** de X . Ainsi les composantes connexes de X forment une partition de X .

Dans

D'un point de vue intuitif les composantes connexes de X sont les morceaux d'un seul composant de X . Par exemple les composantes connexes de X est $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ est $[0, 1]$ et $[2, 3]$

Prop 1.10

Si une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe, alors son adhérence $\bar{A}$ est connexe.

Preuve

soit $f: \bar{A} \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue. Comme A est connexe alors $A \subset f^{-1}(\{0\})$ ou $A \subset f^{-1}(\{1\})$ et f continue. Comme $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont fermés, on a $\bar{A} = f^{-1}(\{0\})$ ou $\bar{A} = f^{-1}(\{1\})$.

Remarque 1.11

- Un produit d'espace connexe est connexe.
- Les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont connexes.

2) Connexité par arcs

Dans cette partie, nous introduisons une notion un peu plus forte que la connexité et plus facile à vérifier dans les cas pratiques, si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, on appelle chemin joignant $x \in X$ et $y \in X$ toute application $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ et $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Def 2.2

On dit qu'une partie A d'un espace topologique (X, τ) est connexe par arc si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin.

Remarque 2.3

Un espace topologique connexe par arc est connexe.

Chap. III : Compacité

La notion de compacité évoque une idée de petitesse. Pour ce faire dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une ∞ infinité de points sans qu'il y ait accumulation à quelque part. Dans les classes antérieures on a vu que les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

Par l'effet de la petitesse, les **compacts** sont définis par une propriété de finitude topologique. L'importance de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet de ramener les problèmes de complexité apparemment infinis à l'étude d'un nombre fini de cas.

1) Définitions

Def 1.1 (Borel Lebesgue)

On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouvert, on peut extraire un sous recouvrement fini, i.e.

$$(X = \bigcup_{i \in I} O_i) \Rightarrow (\exists \mathcal{J} \subset I, \mathcal{J} \text{ fini}, X = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} O_j)$$

Par passage au complémentaire, on a une définition équivalente avec les fermés.

Def 1.2

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire un sous famille fini d'intersection vide, i.e.

$$(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset) \Rightarrow (\exists \mathcal{J} \subset I, \mathcal{J} \text{ fini}, \bigcap_{j \in \mathcal{J}} F_j = \emptyset)$$

Prop 1.3

si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute suite décroissante de fermé non vide $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_{n+1} \subset F_n$, $F_n \neq \emptyset$ a une intersection non vide

En effet,

supposons $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ alors il existe $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i=1}^N F_{n_i} = \emptyset$ (définition de la Compacité). On a donc

$$F_{\max\{n_1, \dots, n_N\}} = \bigcap_{i=1}^N F_{n_i} = \emptyset$$

Ab absurde $\bigcap_{i=1}^N F_{n_i} \neq \emptyset$

Def 1.4

Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dite compacte si A muni de la topologie induite $(A, \mathcal{T}_A)$ est compacte

La propriété de Borel Lebesgue dans A muni de $\mathcal{T}_A$ s'écrit $(A \subset \bigcup_{i \in I} O_i) \Rightarrow (\exists \mathcal{J} \subset I, \mathcal{J} \text{ fini}, A \subset \bigcup_{j \in \mathcal{J}} O_j)$

La définition avec les fermés de $(X, \mathcal{T})$ donne $(A \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset) \Rightarrow (\exists \mathcal{J} \subset I, \mathcal{J} \text{ fini}, A \cap (\bigcap_{j \in \mathcal{J}} F_j) = \emptyset)$

Exemple 1.5

- L'ensemble vide $(\emptyset)$ est compact
- Tout ensemble fini avec n'importe quelle topologie est compact
- $\mathbb{R}$ n'est pas compact, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$

2) Compacité des espaces métriques

Dans un espace métrique nous devons pouvoir caractériser la Compacité qui est une notion topologique avec des suites.

Propriété 2.1

Pour une partie A d'un espace métrique (X, d) , les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) A est compact
- (ii) Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A . Cette propriété est appelée Propriété de Bolzano Weierstrass
- (iii) De toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite convergente dans A .

Propriété 2.2 (Lemme)

Si une partie A d'un espace métrique vérifie (iii) de la propriété 2.1 et si $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un recouvrement d'ouvert de A alors il existe une constante $P > 0$, $\forall x \in A$, $B(x, P)$ est incluse dans l'un des O_i ie $\forall x \in A, \exists i_x \in I, B(x, P) \subset O_{i_x}$

Preuve

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, B(x_n, \frac{1}{n+1})$ ne soit pas incluse dans aucun des O_i . Par hypothèse (iii) de la propriété 2.1, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente dans A . Posons $l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Comme $l \in A$,

$\exists i \in I, l \in O_i$. Comme O_i est un ouvert, $\exists \varepsilon > 0, B(l, \varepsilon) \subset O_i$. Par définition de la limite, on peut trouver un k_ε tel que $\forall k \geq k_\varepsilon, d(l, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{3}$, on peut donc supposer k_ε assez grand pour que $\frac{1}{n_{k_\varepsilon} + 1} < \frac{\varepsilon}{3}$. mais dans ce cas, on a que la boule de centre $B(x_{n_{k_\varepsilon}}, \frac{1}{n_{k_\varepsilon} + 1}) \subset B(l, \varepsilon) \subset O_i$.

Ce qui contredit la définition de la suite x_n . Par conséquent $\exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A, B(x, \frac{1}{m_0 + 1})$ est incluse dans un des O_i ou on prend $P = \frac{1}{m_0 + 1}$

Remarque 2.3

Tout espace métrique compact est séparable

Propriété 2.4

Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $a < b$, est compact

Preuve

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$. On va extraire une sous-suite convergente par la méthode de dichotomie. On construit une suite de couple $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$
- On pose $C_k = \frac{a_k + b_k}{2}$. S'il existe un nombre infini d'indices n tels que $x_n \in [a_k, C_k]$, on prend $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = C_k$ sinon on prend $a_{k+1} = C_k$ et $b_{k+1} = b_k$. On a ainsi formé deux suites adjacentes a_k et b_k telles que $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Cette limite des deux suites adjacentes est aussi la limite de x_{n_k} .

3° Propriété des Compacts

Propriété 3.1

Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.

En effet

Soit K une partie compacte de $(X, \mathcal{T})$ une topologie séparée. Montrons que K^c est un ouvert. Soit $x \in K^c$. Comme $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé, $\forall y \in K$, il existe $V_{x,y}$ un voisinage de x ($V_{x,y} \in \mathcal{T}$) et $W_{x,y} \in \mathcal{T}$ tel que $y \in W_{x,y}$ et $V_{x,y} \cap W_{x,y} = \emptyset$. Comme K est compact on peut extraire de recouvrement

d'ouverts $\bigcup_{y \in K} W_{x,y}$ une union recouvrant $\text{fini } K \subset \bigcup_{i=1}^n W_{x,y_i}$
 $\forall i = \{1, \dots, n\}$
 $\forall x, y_i \in U_x$
 Posons $V = \bigcap_{i=1}^n W_{x,y_i}$. on a $V \in \mathcal{U}_x$ et $V \subset K^c$
 Aussi K^c est un ouvert. Par suite K est fermé.

Proposition 3.2

Si (X, τ) est un espace topologique compact et F un fermé de X , alors F est compact.

En effet

Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermé telle que $F \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$
 alors la famille $(F \cap F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermé d'intersection vide de X . Comme (X, τ) est compact, il existe une partie finie $J \subset I$ t.q. $\bigcap_{j \in J} (F \cap F_j) = \emptyset$
 $= F \cap (\bigcap_{j \in J} F_j) = \emptyset$ d'où F est compact.

Remarque 3.3

Dans un espace topologique compact, les compacts sont les fermés.

Les compacts de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés.

Définition

Une partie A d'un espace topologique séparé (X, τ) est relativement compacte si son adhérence est compacte.

Remarque 3.5

- Dans un espace topologique séparé, une réunion finie de compacts est compacte.
- Dans un espace topologique, l'intersection quelconque de parties compactes est compacte.

• Un produit d'espace topologique Compact est Compact
(Propriété de Tychonoff)

4) Fonctions continues et Compacité

Propriété 4.1

Soit $(X, \tau), (X', \tau')$ deux espaces topologiques séparés.
L'image d'un Compact par une application continue
de X dans X' est Compacte

Preuve

soit $f \in C^0(X, X')$ et K un Compact de X . soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $f(K)$ i.e. $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

Alors $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$ est un recouvrement de K . Comme K est Compact, on peut en extraire un sous recouvrement fini i.e. $K \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)$ avec J fini.

On a alors $f(K) \subset \bigcup_{j \in J} O_j$.

Par conséquent, $f(K)$ est Compact.

Remarque 4.2

Toute fonction continue sur un espace Compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes

Définition 4.3

On dit qu'une application continue $f: X \rightarrow X'$ où (X, τ) et (X', τ') sont deux espaces topologiques séparés (est propre si pour tout Compact $K' \subset X'$, l'image réciproque $f^{-1}(K')$ est un Compact de X)

Propriété 4.4

si $(X, d), (X', d')$ sont deux espaces métriques avec

(X, d) Compact, toute application Continue $f: X \rightarrow X'$ est uniformément Continue. En effet, En effet,

si $f: X \rightarrow X'$ est Continue, $\bigcup_{z \in X'} (B_{d'}(z, \frac{\epsilon}{2}))$ est un recouvrement de X' . Par suite

$\bigcup_{z \in X'} f^{-1}(B_{d'}(z, \frac{\epsilon}{2}))$ est un recouvrement de X

D'après la propriété 2.2, il existe $\rho > 0$, $\forall x \in X, \exists z_x \in X'$,

$$B_d(x, \rho) \subset f^{-1}(B_{d'}(z_x, \frac{\epsilon}{2}))$$

Ainsi $\forall x, y \in X, d(x, y) \leq \rho, d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(z_x)) + d'(f(z_x), f(y))$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d'(f(x), z_x) + d'(z_x, f(y)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Definition 4.5

On dit qu'un espace topologique séparé (X, τ) est localement Compact si tout point admet une base de voisinage Compact.

Chap 41 Espaces Vectoriels normés

Nous étudions dans ce chapitre les espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais beaucoup plus en détail. On notera une différence fondamentale entre les espaces vectoriels de dimension fini et ceux de dimension infini. Les résultats portant sur la dimension infinie peuvent être vus comme les premiers rudiments d'analyse fonctionnelle.

1. Généralités

Definition 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

- (i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 1.2

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un e.v. sur $\mathbb{K}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Proposition 1.3

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v. alors $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E . De plus la topologie ainsi définie est compatible avec la structure e.v. i.e. les applications $E \times E \rightarrow E$ et $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto x + y$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues.

En effet, il n'est pas difficile de montrer que la distance x, y La continuité des applications ci-dessus vient des inégalités

suivantes:

$$\|(x'+y') - (x+y)\| \leq \|x'-x\| + \|y'-y\| \text{ et}$$

$$\|\lambda x' - \lambda x\| = \|\lambda x' - \lambda x - \lambda x' + \lambda x'\|$$

$$= \|\lambda x' - \lambda x - \lambda x' + \lambda x'\| \leq |\lambda - \lambda| \|x'\| + |\lambda| \|x - x'\|$$

Remarque 1.4

L'application norme est 1-lipchitzienne de

$$(E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ i.e.}$$

$$\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Définition 1.5

Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur un K . et E sont dites équivalentes si $\exists$ une constante C telle que $\forall x \in E, C^{-1} \|x\| \leq \|x'\| \leq C \|x\|$.

Exemple 1.6

Sur K^n les normes $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ et les normes $\|x\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ sont des normes équivalentes.

- la quantité $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ est une norme sur $C^0([0,1], K)$ qui n'est pas équivalente à la convergence de la norme infinie.

$$\|f\|_\infty = \sup$$

En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $f_n(x) = 1 - (n+1)x$ pour $x \leq \frac{1}{n+1}$ et $f_n(x) = 0$ si $x > \frac{1}{n+1}$.



$$\|f_n\|_{\infty} = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi on a le rapport $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_{\infty}}$ n'est pas uniformément minoré

Proposition 1.7

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux K.e.v.n. Une application linéaire $f: E \rightarrow F$ est continue si il existe une constante $M > 0$ t.p. $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

En effet,

$\Rightarrow$ si f est une application linéaire continue de E dans F , $\exists P > 0$, $B_{F,E}(0, P)$ soit incluse dans $f^{-1}(B_{F,F}(0, 1))$

$\forall x \in E \setminus \{0\}$

$$P \cdot \frac{x}{\|x\|_E} \in B_{F,E}(0, P) \subset f^{-1}(B_{F,F}(0, 1))$$

$$\|f(P \cdot \frac{x}{\|x\|_E})\|_F = \frac{P}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$$

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{P} \|x\|_E$$

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{P}$

$$\Leftrightarrow \forall x \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$$

$\forall x, y \in E$

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq M \|x - y\|_E$$

Remarque 1.8

• Toute application continue de E dans F est lipchitzienne

• Deux normes sur un K.e.v. E sont topologiquement équivalentes si elles sont métriquement équivalentes

Definition 1.9

Soit $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ deux normes fixées. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F .

On appelle **dual topologique de E** et on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$ l'espace des formes linéaires continues sur E .

Definition 1.10

Si $(A, +, \cdot, \lambda, 0)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$, on appelle norme d'algèbre toute norme sur le $\mathbb{K}$. e. v. qui vérifie $\forall A, B \in A, \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

On dit alors $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée.

2.1 Compacité et espaces normés

Dans cette partie, nous distinguerons le cas des dimensions finies et des dimensions infinies.

• Dimension finie $\dim E = n < +\infty$

Proposition 2.1 (Lemme)

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et si on lui associe la norme $\|x\|_\infty = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$. La boule unité fermée $B_F(0, 1)$ est compacte. En effet,

En effet,

L'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{\quad} E$$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un homéomorphisme

et même une isométrie de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$

mais la boule unité fermée de $\mathbb{K}^n$ est compacte.

Par conséquent, il en est de même de son image.

d'où $B_f(0,1) \in E$ est Compact.

Proposition 2.2

Dans un espace vectoriel de dimension finie E ,

- (i) Toute les normes sont équivalentes
- (ii) Pour toute norme les Compacts sont les fermés bornés
- (iii) si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un K.e.v. n de dimension quel conq alors toute application linéaire de $E \rightarrow F$ est continue

Preuve

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et on lui associe la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$.

Si $\|\cdot\|$ désigne une autre norme sur E , on a $\forall x \in E$,
 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|$
 $\leq \max |x_i| (\sum_{i=1}^n \|e_i\|) = (\sum_{i=1}^n \|e_i\|) \|x\|_\infty$

d'où $\|x\| \leq C \|x\|_\infty$

Cette dernière inégalité nous dit que l'application identité est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(E, \|\cdot\|)$

Et par conséquent $\|\cdot\| : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

La sphère $S_\infty(0,1) = \{x \in E, \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact de E muni de la norme infinie (car partie fermée du compact $B_f(0,1)$ et comme $\|\cdot\|$ la fonction continue $\|\cdot\|$ y est strictement positive, $\exists \delta > 0, \forall x \in S_\infty(0,1), \|x\| \geq \delta$
 $\forall x \in E, \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0,1)$ donc $\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\| \geq \delta$

$$\frac{1}{\|x\|_\infty} \|x\| \geq \delta$$

$$\|x\| \geq \delta \|x\|_\infty \text{ ie } \delta \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C \|x\|_\infty$$

(ii) Comme toutes les normes sont métriquement équivalentes

les propriétés de fermé et de compact ne dépendent pas de la norme.

Or les Compacts munis de la norme $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés de $(E, \|\cdot\|)$

Ainsi pour toute norme les compacts sont les fermés bornés.

(iii) si f est une application linéaire de E dans F , alors $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F = \|f(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\|_F = \|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\|_F \leq \max |x_i| \|\sum_{i=1}^n f(e_i)\|_F = (\|\sum_{i=1}^n f(e_i)\|_F) \|x\|_{\infty} \leq \|\sum_{i=1}^n f(e_i)\|_F \|x\|$

Remarque 2.3

- Si E est un $\mathbb{K}$. e. v. n de dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues
- En dimension finie, tout sous espace vectoriel est fermé. En effet, si E est un $\mathbb{K}$ e. v. n de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E alors F peut être vu comme le noyau de la projection $\pi: E \rightarrow E/F$ sur l'espace vectoriel quotient. Cette projection est linéaire donc continue puisque E est de dimension infinie. Mais $F = \text{Ker}(\pi) = \pi^{-1}(\{0\})$

Dimension infinie

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$ e. v. n d'une dimension quelconque

Proposition 2.4

Tout sous espace vectoriel de dimension finie F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_E)$

En effet

L'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_E)$ est de dimension finie

des fermés bornés sont des Compacts. si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de F qui convergent dans E i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in E$, alors il est borné dans $(E, \|\cdot\|_F)$ donc borné $B(F, \|\cdot\|_F)$.

On peut donc extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans F i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l_F \in F$. Comme E est séparé, on a que $l_E = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l_F \in F$ et ce pour toute suite de F ayant une pour limite l_F . F est donc fermé.

Proposition 2.5 (Théorème de Riesz)

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un IK, on a les propositions suivantes sont équivalentes

- (i) $B_F(0, 1)$ est Compact
- (ii) E est de dimension finie.

Première

(i $\Rightarrow$ ii) déjà faite (proposition 2.1)

(ii $\Rightarrow$ i)

Notons $B = B_F(0, 1)$; la famille $B(x_i, \frac{1}{2})$ $x_i \in B$ est un recouvrement de B . Si B est Compact, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in B$ t.q. $B \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$.

Soit $F = \text{vect}\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ l'espace vectoriel engendré par les x_i . C'est un s.e.v. de dim $< +\infty$ donc F est un fermé de E . De plus l'inclusion précédente donne

$$\begin{aligned} B \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}) &\text{ donne } B \subset F + \frac{1}{2}B \\ & \subset F + \frac{1}{2}(F + \frac{1}{2}B) \\ & \subset F + \frac{1}{2^n}B. \end{aligned}$$

Autrement dit si $F \in B$, $\exists x_n \in F$ / $d(x, x_n) < \frac{1}{2^n}$ donc $d(x, F) = 0$, i.e. $x \in \bar{F}$. Comme F est fermé alors $x \in F$.

Dans ce cas, E tout entier est inclus dans F qui est de dimension finie donc E est de dimension finie.

Definition 2.6

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ on dit qu'une somme directe $E = F \oplus G$ est topologique si les projections $\pi_{F,G} : E \rightarrow F$ et $\pi_{G,F} : E \rightarrow G$ données par $\pi_{F,G}(x_F + x_G) = x_F$ et $\pi_{G,F}(x_F + x_G) = x_G$ sont continues, on dit que G (resp F) est un supplémentaire topologique de F (resp G).

Proposition 2.7

si $E = F \oplus G$ avec F fermé et G de dimension finie alors la somme directe est topologique.

En effet:

Il s'agit ici de vérifier que la projection $\pi_{F,G}$ est continue. Par l'absurde supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x^n \in E$ $\|x^n\|_E = 1$ et $\|x_F^n\|_E \geq n$ avec $x^n = x_F^n + x_G^n$.

Supposons $\frac{x_F^n}{\|x_F^n\|_E} = f^n$ et $g^n = \frac{x_G^n}{\|x_F^n\|_E}$.

Par ailleurs, on a $\|g^n\|_E = \frac{1}{\|x_F^n\|_E} \|x^n - x_F^n\|_E$

$$\leq \frac{\|x^n\|_E}{\|x_F^n\|_E} + \frac{\|x_F^n\|_E}{\|x_F^n\|_E} = \frac{1}{\|x_F^n\|_E} + 1 \leq 2.$$

La suite g^n est donc une suite bornée sur G qui est de dimension finie (c'est un fermé et ses fermés bornés sont compacts). On peut donc extraire une sous suite convergente sur G . Soit $(g^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ cette suite et notons $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{n_k} = g \in G$.

En ayant, On a alors $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\|x_F^{n_k}\|_E} (x_F^{n_k} - x_G^{n_k}) \right)$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{nk}}{\|x_F^{nk}\|} - g^{nk} \right) = -g$$

Par hypothèse, F est fermé, alors toute suite d'élément de F converge dans F par conséquent $-g \in F$.

Par suite, g est dans $F \cap G = \{0\}$.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^{nk} = 0$, ce qui contredit le fait que $\|f^{nk}\|_E = 1$.
ainsi la projection $\Pi_{F,G}$ est continue

Proposition 2.8

Une forme linéaire sur un e.v.n $(E, \|\cdot\|_E)$ est continue ssi son noyau est fermé.

En effet:

Soit φ une forme linéaire sur E

$\Rightarrow$ si φ est continue alors $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ qui est un sous espace vectoriel fermé dans $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ si $\text{Ker } \varphi$ est un s.e.v fermé, alors deux situations se présentent

- si $\text{Ker } \varphi = E$ alors $\varphi = 0$ c'est donc une application constante donc continue

- s'il existe $u \in E$ tq $\varphi(u) \neq 0$, on a alors

$$E = \text{Ker } \varphi \oplus \mathbb{K}u$$

En effet, si $x \in E$, le vecteur $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u \in \text{Ker } \varphi$.

On est donc dans la situation de la proposition 2.7.

$$E = F \oplus G.$$

La projection $\Pi_{\text{Ker } \varphi, \text{Ker } \varphi}$ est continue tandis que l'application linéaire $\theta: \mathbb{K}u \rightarrow \mathbb{K}$ donnée par $\theta(\lambda u) = \lambda$ est continue

Par conséquent la forme linéaire φ est continue avec

$$\text{car } \varphi = \varphi(u) \theta \circ \Pi_{\text{Ker } \varphi, \text{Ker } \varphi}$$

3.1 Espace vectoriel quotient

Si les sous espaces vectoriels fermés non pas nécessairement complémentaires dans l'espace ambiant, les espaces quotients ont toutefois la bonne propriété. En rappel, si F est un s.e.v. de E , l'espace vectoriel quotient E/F est donné par la relation d'équivalence $(x \sim y) \Leftrightarrow x - y \in F$. Les classes d'équivalence n'étant rien d'autre que les sous espaces affines $\tilde{x} = x + F$ et en notant $\pi: E \rightarrow E/F$ la projection associée à cette relation d'équivalence. On a $\forall x \in E$
 $\pi(x) = x + F \in E/F$.

D'autre part, on voit que la topologie quotient est séparée si les classes d'équivalence $x + F$ sont fermés dans E . L'hypothèse F est fermé est donc tout naturel.

Proposition 3.1

si F est un s.e.v. fermé de $(E, \|\cdot\|_E)$ alors la quantité $\|\tilde{x}\|_{E/F} = \inf_{y \in F} \|x - y\|_E$ définit une norme sur E/F .

Remarque 3.2

La topologie associée à la norme définie dans la proposition 3.1 est la topologie quotient.

Chap 57 Espace metriques Complets

On pouvait parler jusqu'à présent de la convergence d'une suite seulement quand on connaissait a priori la limite. La notion de **Completude** est une notion metrique permettant de predire l'existence d'une limite en partant des propriétés de la suite. Dans ce chapitre, on se placera dans le cadre d'un espace metrique

1.1 suites de Cauchy, espaces metriques Complets

Definition 1.1

Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace metrique (X, d) est de Cauchy si elle verifie.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposition 1.2

Une suite de Cauchy est toujours bornée.

En effet,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_1, d(x_m, x_n) < 1$. En particulier $\forall n \geq N_1, d(x_n, x_{N_1}) < 1$

Posons $M = \max_{k \leq N_1} d(x_k, x_{N_1})$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{N_1})$

$\leq \max\{M, 1\}$ donc la suite de Cauchy est bornée.

Proposition 1.3

Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente converge.

Preuve

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) tq

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \in X$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, k_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geq k_\varepsilon, d(x_{n_k}, l) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Posons } N_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, n_{k_\varepsilon})$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Proposition 1.4

Toute suite Convergente est de Cauchy.

En effet

soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de (X, d) telle que
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \in X$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Aussi

$$\forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) \leq d(x_m, l) + d(x_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Définition 1.5

On dit qu'un espace (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

2.1 Propriétés des espaces métriques complets

Proposition 2.1

Dans un espace métrique complet (X, d) , les sous-espaces complets sont les fermés.

Preuve

Soit F une partie d'un espace métrique complet (X, d)

$\Leftarrow$ Supposons F fermé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (F, d) , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de (X, d) . Elle admet donc une limite dans X . Mais comme F est fermé, cette limite revient à F par conséquent, F est complet.

$\Rightarrow$ supposons que (F, d) est complet

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de F admettant une limite l dans X . Alors elle est de Cauchy dans (X, d) et donc dans (F, d) aussi. Comme (F, d) est complet, elle converge dans F d'où F est fermé.

Remarque 2.2

- Si (X, d) est un espace métrique, une intersection quelconque de sous espaces complets de (X, d) est aussi complet.
- Si (X, d) est un espace métrique, une union finie de (X, d) est complet.

Proposition 2.3

Tout espace métrique compact est complet

En effet

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique compact (X, d) . On peut donc extraire une sous suite qui converge dans (X, d) . D'après la proposition 1.3, la suite (x_n) converge vers un espace compact (X, d) donc (X, d) est complet.

Remarque 2.4

Un produit fini ou dénombrable d'un espace métrique complet est complet.

3.1 Espaces de Banach

Définition 3.1

On appelle espace de Banach un E v.n. complet.

Les E v.n. de dimension finie sont des espaces de Banach.

Proposition 3.2

Si (X, τ) est un espace topologique, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach alors $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées et $C_b^0(X, E)$ muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$.

Pour la preuve, il suffit de prendre $(X, d') = (E, \|\cdot\|_E)$.

Exemple 3.3

Soit $E = C^0([-2, 1], \mathbb{R})$

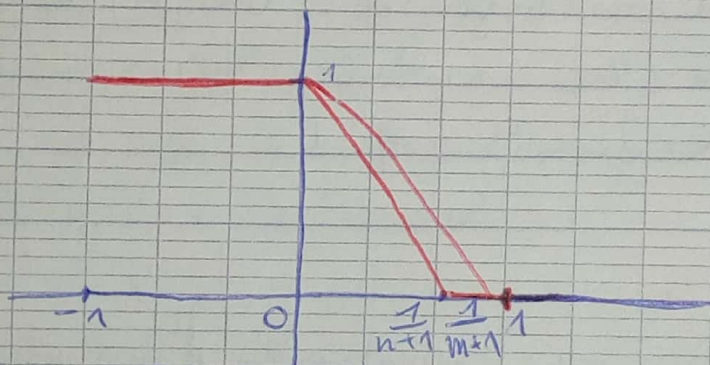
$(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

En revanche $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

En effet:

soit une suite de fonctions définie par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (n+1)x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_{-1}^0 |1 - 1| dx + \int_0^{\frac{1}{n+1}} |1 - (n+1)x - 1 + (m+1)x| dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^1 |0 - 0| dx \end{aligned}$$

La suite f_n est une suite de Cauchy mais n'est pas convergente dans $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$ qui n'est pas une fonction continue.

Remarque 3.4

La Complétude d'un espace vectoriel normé est très utile pour l'étude de la convergence des séries.

Définition 3.5

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K, \|\cdot\|_K)$, $(E, \|\cdot\|_E)$ une norme sur E . On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est absolument convergente (ou normalement convergente) si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_E < +\infty$.

Dans cette définition on ne dit pas que la série converge, mais que la série des normes converge. La convergence de la série est une conséquence de la définition suivante.

Proposition 3.6

Un $(K, \|\cdot\|_K)$, E muni de la norme sur E est un espace de Banach si toute série $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ absolument convergente converge dans E i.e. $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_E < +\infty) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \in E$.

Preuve

Supposons $(E, \|\cdot\|_E)$ une série de Banach.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E t.p. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_E < +\infty$ alors la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ vérifie $\forall N \geq N, \|S_N - S_M\|_E \leq \sum_{n=N+1}^M \|X_n\|_E$. Ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in E$.

4- Supposons que toute série absolument convergente converge.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_E)$. On peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tel $\forall k \quad \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Posons alors $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k}$ donc absolument convergente et donc converge dans $(E, \|\cdot\|_E)$ par hypothèse. Par hypothèse, on $x_{n_{k+1}} - x_{n_0} = \sum_{j=0}^k u_j$ et on déduit que la sous-suite x_{n_k} converge dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_{n_0} + \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$. Avec la proposition

1.37, on conclut que x_n converge dans $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach.

4.1 Application de la Complétude

Soit $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit pour $A \in M_n(\mathbb{K})$
 $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|A \cdot e_i\|_\infty$

Proposition 4.1

Si $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la série $f(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n A^n$ converge dès que $\|A\| < R$.

En effet:

$\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|C_n A^n\| = |C_n| \|A\|^n \leq |C_n| \|A\|^n$. Pour $\|A\| < R$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |C_n| \|A\|^n < +\infty$ et la série $f(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n A^n$ est absolument convergente donc convergente.

Proposition 4.2 (Théorème de prolongement)

Soit (X, d) , (X', d') deux espaces métriques avec (X', d') complet et soit $Y \subset X$. Si une application $f: Y \rightarrow X'$ est uniformément continue et si Y est dense dans X alors f admet un unique prolongement par continuité $f: X \rightarrow X'$.

En effet:

Il s'agit ici de montrer que $\forall x \in X$, la $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} f(y)$ existe dans X' .

Comme (X, d) est un espace métrique, on peut utiliser les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x \in X$. Une telle suite est nécessairement une suite de Cauchy dans (X, d) donc dans (Y, d) . Mais comme f est uniformément continue, la suite image $f(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet, par conséquent cette suite image $f(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (X', d') et ce pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Y convergent vers x . On a donc $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} f(y)$ existe, d'où le prolongement.

Proposition 4.3 (Théorème de point fixe)

Soit (X, d) un espace métrique complet. Si l'application $f: X \rightarrow X$ est contractante i.e. $(\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ avec $\alpha \in [0, 1[)$ alors elle admet un point fixe $x \in X$, $f(x) = x$, de plus toute suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ converge géométriquement vers x i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x) \leq d(x_0, x) \alpha^n$.

Preuve

• Unicité du point fixe

supposons que x_1 et x_2 soient deux points fixes de f ,

alors $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2)$
 absurde dans $x_1 = x_2$

• Existence

Si on va construire x par une méthode d'approximation successive, considérons une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in X$.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (n > m), \quad d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=m}^{n-1} d(f(x_k), f(x_{k+1})) = \sum_{k=m}^{n-1} d(f^k(x_0), f^k(x_1))$$

La propriété de contraction avec $\alpha < 1$, on a
 $d(f^k(x_0), f^k(x_1)) \leq \alpha d(f^{k-1}(x_0), f^{k-1}(x_1))$
 $\leq \alpha^k d(x_0, x_1)$

$$\text{Puis } d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k$$

$$= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-1-m+1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

$$\leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, en prenant $N_\varepsilon > \frac{\ln(1-\alpha) \times \varepsilon}{\ln \alpha}$
 $\forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) < \varepsilon$

La suite x_n est donc de Cauchy dans (X, d) .
 Elle admet une limite $x \in X$ et on a

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = f(x)$$

Chap VI Espaces de Fonctions Continues

Soit (X, τ) un espace topologique complet. On peut munir l'espace $C^0(X, \mathbb{K})$ de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Dans ce chapitre, deux résultats topologiques essentiels sont présentés.

Le théorème de **stones & Weierstrass** qui est un résultat de densité et de théorème d'Ascoli qui est un résultat de Compacité. Ces résultats sont représentés sur des familles de fonctions continues. Il s'agit de résultats classiques qui ont des nombreuses conséquences d'application en analyse.

1.1 Théorème de stones - Weierstrass

Soit (X, τ) un espace topologique compact. On sait que $C^0(X, \mathbb{K})$ muni des opérations $+$, $\cdot$, λ et de la topologie de la convergence uniforme associée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ est une algèbre de Banach.

Une question qui se pose au sujet de ~~ces~~ ^{est} ~~la~~ densité est par exemple : sont-elles denses ? peut-on approcher uniformément toute fonction continue de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par des fonctions polynomiales ?

Le théorème de stones - Weierstrass apporte une réponse assez générale à ces questions.

Le résultat de base porte sur une fonction continue à valeurs réelles puisque la démonstration utilise de façon cruciale la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

La **généralisation en cas complexe** s'obtient par en décomposant en partie réelle et en partie imaginaire.

Proposition 1.1 (Théorème de Stone-Weierstrass)

Soit A une sous algèbre de $C^0(X, \mathbb{R})$ vérifiant

1) A sépare les points i.e. $\forall (x, y) \in X \times X, x \neq y, \exists f \in A$
t.q. $f(x) \neq f(y)$

2) $\forall x \in X, \exists f \in A$ t.q. $f(x) \neq 0$

alors A est dense dans $(C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
i.e. $\bar{A} = C^0(X, \mathbb{R})$

Proposition 1.2 (Corollaire)

Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ est dans $(C^0(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. En effet, l'algèbre des polynômes sur $\mathbb{R}$ à n variables définit bien une sous algèbre sur $C^0(K, \mathbb{R})$ en associant à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ la fonction polynôme $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui dépend continuellement de x dans K .

Vérifions les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass. Soient $x, y \in K$ deux points distincts alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $x_i \neq y_i$. En prenant $P = X_i$, on a $P(x) = x_i \neq y_i = P(y)$.

2) Pour $x \in K$, on a $1 \neq 0$ et en prenant $P = 1$, on a $1(x) = 1 \neq 0$.

Les hypothèses du théorème étant vérifiées, on conclut $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = C^0(K, \mathbb{R})$

Proposition 1.3

Si A est une sous algèbre $C^0(X, \mathbb{C})$ vérifiant :

i) A sépare les points

ii) $\forall x \in X, \exists f \in A, f(x) \neq 0$

iii) A est globalement invariant par conjugaison

complexe i.e $\forall f \in A$, la fonction complexe conjuguée $\bar{f}$ est aussi élément de A .
 Alors A est dense dans $(C^0(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$

Preuve

L'idée ici est tout simplement de se ramener au cas réel en s'appuyant sur la condition 3.

En Notant $A_r = A \cap C^0(X, \mathbb{R})$, $\forall f \in A$, on a $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$
 $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ éléments de A_r .

Comme A vérifie les hypothèses i et ii alors A_r vérifie aussi les hypothèses i et ii. Par conséquent le théorème de Stone-Weierstrass nous dit que $\overline{A_r}^{\|\cdot\|_\infty} = C^0(X, \mathbb{R})$.
 soit $g \in C^0(X, \mathbb{C})$. $g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g$ et on approche en norme de la convergence uniforme $\operatorname{Re} g$ et $\operatorname{Im} g$ par des éléments de A_r . Notons

$$\operatorname{Re} g = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n,R} \quad \operatorname{Im} g = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n,I}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_{n,R} + i f_{n,I}) &= \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g \\ &= g \in C^0(X, \mathbb{C}) = A \text{ d'où } \overline{A}^{\|\cdot\|_\infty} = C^0(X, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

2. Démonstration du Théorème de Stone-Weierstrass

Dans cette partie, nous démontrons le théorème de Stone-Weierstrass dans le cas réel, nous ^{nous}extrayons donc ici au cas des fonctions à valeurs réelles. La démonstration se fera essentiellement en trois étapes.

Proposition 3.1 (lemme)

sur l'intervalle $[-1, 1]$, on peut ~~se~~ approcher uniformément la fonction valeur absolue $| \cdot |$ par une

de polynomes $P_n \in \mathbb{R}[x]$, $P_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 En effet:

$\forall n \in \mathbb{N}$, posons $\varepsilon = \frac{1}{6(n+1)}$ et on a, $\forall x \in [-1, 1]$
 on a $0 \leq (x^2 + \varepsilon)^{1/2} - |x|$

$$(x^2 + \varepsilon)^{1/2} - |x| = \frac{x^2 + \varepsilon - x^2}{(x^2 + \varepsilon)^{1/2} + |x|} = \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon)^{1/2} + |x|} \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = \varepsilon$$

On pose ensuite $u = \frac{x^2 - 1}{1 + \varepsilon^2}$ de sorte que

$$\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 + (x^2 - 1)} = \sqrt{1 + \varepsilon^2} \sqrt{1 + u}$$

$$|u| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

On sait que la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u}$ admet un développement en série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u^k$ qui a pour rayon de convergence 1.

En particulier, on a ici une convergence uniforme dans le disque de rayon $\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{N_\varepsilon}$.

Il existe donc N_ε , $Q_{N_\varepsilon}(u) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} \alpha_k u^k$ tq

$$|\sqrt{1+u} - Q_{N_\varepsilon}(u)| \leq \varepsilon, \quad |u| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$\text{On a donc } \forall x \in [-1, 1], \left| \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \sqrt{1 + \varepsilon^2} Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{x^2 - 1}{1 + \varepsilon^2}\right) \right| \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

En particulier, pour $x = 0$, on déduit que $\sqrt{1 + \varepsilon^2} |Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{-1}{1 + \varepsilon^2}\right)| \leq 3\varepsilon$

En se rappelant qu'on a choisi $\varepsilon = \frac{1}{6(n+1)}$ on prend $P_n(x) = \sqrt{1 + \varepsilon^2} \left[Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{x^2 - 1}{1 + \varepsilon^2}\right) - Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{-1}{1 + \varepsilon^2}\right) \right]$

$P_n(x)$ est un polynôme vérifiant $P_n(0) = 0$ et $\forall x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

Proposition 2.2

Toute sous-algèbre fermée $\bar{A} \subset C^0(X, \mathbb{R})$ est réticulée
i.e. $\forall f$ et $g \in \bar{A}$, les fonctions $\min\{f, g\}$ et $\max\{f, g\}$
appartiennent à $\bar{A}$.

Remarque

Remarquons que $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|)$ et
 $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|)$.

$\bar{A}$ étant une algèbre, il suffit de vérifier que $\forall f \in \bar{A}$,
 $|f| \in \bar{A}$. De plus, plutôt à prendre $\frac{f}{\|f\|_\infty}$, on peut supposer
 $\|f\|_\infty \leq 1$. Dans ce cas, la proposition 2.1) nous donne
 $\forall n \in \mathbb{N}$ un polynôme $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$ tel que $\sup_{t \in X} |f(t) - P_n(f)| \leq \frac{1}{n+1}$

ainsi $|f| = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(f)$, c'est une limite uniforme d'une
suite d'éléments de $\bar{A}$.

Comme $\bar{A}$ est fermé par hypothèse, on conclut que $|f| \in \bar{A}$.

Proposition 2.3

Si R est une partie réticulée de $C^0(X, \mathbb{R})$, on a
l'équivalence suivante ($g \in R^{\|\cdot\|_\infty}$) $\iff$
 $\forall x, y \in X, (f(x), g(y))$ appartient à l'ensemble
 $\{(f(x), f(y)), f \in R\}$

Preuve

$\Rightarrow$ La convergence uniforme implique la convergence
simple

$\Leftarrow$ Soit g vérifiant la propriété de l'énoncé. $\forall (x, y) \in X \times X$,
 $\exists f_{xy} \in R$ tel que $|g(x) - f_{xy}(x)| < \varepsilon$ et $|g(y) - f_{xy}(y)| < \varepsilon$.

Ponons $W_{xy} = \{z \in X, g(z) - \varepsilon < f_{xy}(z) < g(z) + \varepsilon\}$
 Comme $f_{xy} - g$ est continue, W_{xy} est ouvert

et contient x et y . Ainsi, pour x fixé,
 $\bigcup_{y \in X} W_{xy}$ est un recouvrement de X , X étant compact,
 on peut extraire un sous recouvrement fini
 $\bigcup_{i=1}^n W_{xy_i} \supset X$

La fonction $f_n = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} f_{xy_i} \in R$ car R est réticulé

De plus, $\forall z \in X, f_n(z) \leq f_{xy_i}(z) < g(z) + \varepsilon$.

$$g(z) - \varepsilon < f_n(z) < g(z) + \varepsilon$$

En posant $W_n = \{z \in X, f_n(z) = g(z) - \varepsilon\}$, on a que
 W_n contient x et est un ouvert

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ est un recouvrement d'ouvert de X . Comme X
 est un compact, on peut extraire un sous recouvrement
 fini $\bigcup_{i=1}^n W_{ni}$.

Ponons $f = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} f_{ni} \in R$ et on a $\forall z \in X, g(z) - \varepsilon <$

$$f(z) < g(z) + \varepsilon.$$

$$\text{Mais } \forall z \in X, g(z) - \varepsilon < f(z) < g(z) + \varepsilon \\ \text{ie } \varepsilon < f(z) - g(z) < \varepsilon \text{ d'où } \|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

Fin de la démonstration

Si A est une algèbre, $R = \bar{A}$ est une algèbre fermée
 dont réticulée. On a donc $(g \in \bar{R} = \bar{A}) \Leftrightarrow (\forall xy) \in$
 $X \times X, (g(x), g(y)) \in \{(f(x), f(y)), f \in \bar{A}\}$.
 Soit $g \in C^0(X, \mathbb{R})$.

On considère d'abord le cas de $\exists xy \in X$ et $x \neq y$
 $\exists \phi \in A$ tq $\phi(x) \neq \phi(y)$, $\phi(x) \neq 0$, $\phi(y) \neq 0$

Eni, on utilise les hypothèses 1 et 2 et on peut construire le même Φ pour ces deux conditions par combinaison linéaire. On prend $f \in A$ sous la forme $f = \alpha \Phi + \beta \Phi^2$ et on résout $f(x) = \alpha \Phi + \beta \Phi^2$

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \Phi(x) + \beta \Phi^2(x) = g(x) \\ f(y) = \alpha \Phi(y) + \beta \Phi^2(y) = g(y) \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut

$$\Phi(x)\Phi^2(y) - \Phi(y)\Phi^2(x) = \Phi(x)\Phi(y)(\Phi(y) - \Phi(x)) \neq 0.$$

Le système admet une solution unique, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On peut donc trouver $f \in A$ tq $f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$

Enfin le cas $x = y$, on prend tout simplement $f = \frac{g(x)}{\Phi(x)} \Phi \in A$

Ainsi, $\forall x, y \in X \times X$, on sait trouver $f \in A$ tq $(f(x), f(y)) = (g(x), g(y))$. On conclut donc que $g \in \bar{A} \forall g \in C^0(X, \mathbb{R})$

3.1 Théorème d'Ascoli

Soit (X, d) un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique. On considère une partie compacte K de $C^0(X, X')$. $\forall x \in X$, l'application $f \in C^0(X, X')$ qui $x \mapsto f(x)$ est continue. On déduit que l'ensemble $\{f(x), f \in K\}$ est un compact (car image d'un compact par une application continue).

Définition 3.1

Soit (X, d) un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique. On dit qu'une partie E de $C^0(X, X')$ est ponctuellement (relativement) compact si $\forall x \in X$, l'ensemble $\{f(x), f \in E\}$ est (relativement) compact dans (X', d')

De plus comme X est compact dans l'espace métrique

$(C^0(X, X'), d')$ pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ telles de rayon $\frac{\varepsilon}{3}$ centré en f_i i.e. $B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$
 $\forall X \subset \bigcup_{i=1}^N B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$ (conséquence de la compacité de $C^0(X, X')$)
 De plus chaque f_i est uniformément continue sur le compact. $\exists \alpha_i > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \alpha_i$ alors
 $d'(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x, y \in X, d(x, y) < \alpha_i$, alors la distance
 $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_i(x)) + d'(f_i(x), f_i(y)) + d'(f_i(y), f(y))$

si $f \in B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$ alors $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Posez $\alpha = \min_{i=1, \dots, N} \alpha_i$

$\forall x, y \in X, d(x, y) < \alpha \Rightarrow (\forall f \in X, d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

Ce qui est uniforme par rapport à $f \in X$.

Cette uniformité conduit à la définition suivante.

Definition 3.2

Pour deux espaces métriques (X, d) et (X', d') , on dit qu'une partie E de $C^0(X, X')$ est équicontinue sur X (ou encore également uniformément continue) sur X si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \alpha \Rightarrow (\forall f \in E, d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

Remarque 3.3

- si (X, d) est un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique, les parties compactes K de $(C^0(X, X'), d')$ sont nécessairement équicontinues et ponctuellement compactes

- si (X, d) est un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique, les parties relativement compactes E de $(C^0(X, X'), d_{\infty})$ sont nécessairement équi continues et ponctuellement relativement compactes.

Proposition (Théorème d'Ascoli)

Soit (X, d) un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique. Une partie E de $C^0(X, X')$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme si elle est équi continue et ponctuellement relativement compacte.

Une autre façon d'énoncer ce théorème est de dire qu'une famille de fonctions continue est relativement compacte si on peut contrôler uniformément leur valeurs et leur oscillation.

Preuve

Soit E une partie équi continue ponctuellement relativement compacte de $C^0(X, X')$. On veut montrer que E est relativement compact i.e. que son adhérence $\bar{E}$ est compacte dans l'espace métrique $(C^0(X, X'), d_{\infty})$.

Autrement dit, on veut montrer que de toute suite $(f^n)_{n \geq 0}$ de E , on peut extraire une sous suite qui converge uniformément vers une $f \in C^0(X, X')$.
Soit $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans X' . Comme l'espace métrique (X, d) est compact, il est séparable. Soit $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense. Pour chaque k , la suite $(f^n(x_k))_{n \in \mathbb{N}}$ reste dans le compact K_k de (X', d') . Ainsi la suite restriction $(f|_D)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être vue comme une suite de compact métrisable $\prod_{k \in \mathbb{N}} K_k$.

On peut donc extraire une sous-suite $(f^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement sur D .

Étudions maintenant la convergence de cette sous-suite en un point $x \in X$. Par hypothèse, l'adhérence de (x, d') de $\{f(x), f \in E\}$ est compacte, donc complet. Pour que la sous-suite $(f^{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ ait une limite $f(x)$ dans X' , il suffit donc de vérifier que cette sous-suite est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme E est équi-continue, on sait que pour α positif, $\forall x, y \in X, d(x, y) < \alpha, \forall l \in \mathbb{N}, d'(f^{n_l}(x), f^{n_l}(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Puisque D est dense dans X , prenons $x_k \in D$ t.q. $d(x, x_k) < \alpha$. Comme la suite $(f^{n_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans X' , elle est de Cauchy. On peut donc trouver $L_{\varepsilon, k}, \forall l, l' \geq L_{\varepsilon, k}, d'(f^{n_l}(x_k), f^{n_{l'}}(x_k)) < \varepsilon/3$.

$$\begin{aligned} \text{Aussi, } d'(f^{n_l}(x), f^{n_{l'}}(x)) &\leq d'(f^{n_l}(x), f^{n_l}(x_k)) + d'(f^{n_l}(x_k), f^{n_{l'}}(x_k)) + d'(f^{n_{l'}}(x_k), f^{n_{l'}}(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$d'(f^{n_l}(x), f^{n_{l'}}(x)) \leq \varepsilon$$

Ainsi la sous-suite $(f^{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans (X', d') $\forall x \in X$. Soit $f(x)$ sa limite.

Il reste à vérifier que la convergence de $(f^{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ vers f a lieu uniformément. Ainsi, $\forall \varepsilon$ fixé, on sait que $X \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, \alpha)$. $\exists N, X \subset \bigcup_{k=0}^N B(x_k, \alpha)$.

Posons $L_\varepsilon = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} L_{\varepsilon, k}$. On a $\forall l, l' \geq L_\varepsilon$

$$\forall x \in X, d'(f^{n_l}(x), f^{n_{l'}}(x)) < \varepsilon. \text{ On passe à la limite } l' \rightarrow +\infty \text{ et on a } d'(f^{n_l}(x), f(x)) < \varepsilon \text{ si cela est vrai, alors } \sup_{x \in X} d'(f^{n_l}(x), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow d_\infty(f^{n_l}, f) < \varepsilon$$

La suite $(f^{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in C^0(X, X')$.

$\Rightarrow$ Confère Remarque 3.3

Remarque 3.5

si de plus, (X, d) est connexe par arc et si (X', d') est un $\mathbb{K}$.e.v de dim $< +\infty$, il suffit que $E \subset C^0(X, X')$ soit équirécontinue et que $\forall x_0 \in X$, l'ensemble $\{\beta(x_0), \beta \in E\}$ soit borné pour que E soit relativement compact dans $(C^0(X, X'), \|\cdot\|_{\infty})$.

Chap 7: Espaces de Hilbert

De manière générale les espaces de Hilbert généralisent de façon algébrique et topologique à la dimension infinie la notion d'espace euclidien. Il s'agit donc d'espace de Banach dont la norme est associée à un produit scalaire.

1. Généralités

Définition 1.1

sur $\mathbb{R}$, (resp $\mathbb{C}$) espace vectoriel H , On appelle produit scalaire toute forme :

- i) bilinéaire (sesquilineaire)
- ii) symétrique (hermitienne)
- iii) Définie positive

Définition 1.2

On appelle espace préhilbertien un K espace vectoriel H muni d'un produit scalaire.

Proposition 1.3

Dans un espace préhilbertien, $\forall x, y \in H$,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{avec } \|x\| = (x, x)^{1/2} \text{ et } \|y\| = (y, y)^{1/2}$$

En effet.

$$\forall x, y \in H, \lambda \in K$$

$$\begin{aligned} 0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) &= \|x\|^2 + (x, \lambda y) + (\lambda y, x) + |\lambda|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda(x, y)) + |\lambda|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

$$\lambda = t \overline{(x, y)}$$

$$(x, x) + 2t|(x, y)|^2 + |t|^2(y, y) \geq 0$$

$$t^2 |(x,y)|^2 (y,y) + 2 |(x,y)|^2 + (x,x) \geq 0$$

Ceci est vrai lorsque le discriminant du polynôme est positif ou nul.

$$|(x,y)|^4 - |(x,y)|^2 (x,x)(y,y) \leq 0$$

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Remarque 1.4

Sur un espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ la quantité $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ définit une norme pour laquelle le produit scalaire est continu i.e.

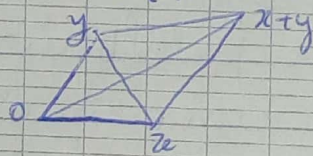
$$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Proposition 15 (Inégalité du parallélogramme)

Dans un espace de Hilbert, H muni $(H, (\cdot, \cdot))$, on a :

$\forall x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$



Remarque 1.6

L'interprétation géométrique pour le parallélogramme de sommets $(0; x; x+y; y)$ est que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Une autre version appelée identité de la médiane dit que la somme des carrés des médianes des triangles de sommets $(0; x; y)$ et $(0; x; x+y)$ est égale à la moyenne des carrés i.e

$$\frac{\|x+y\|^2}{2} + \frac{\|x-y\|^2}{2} = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Definition 1.7

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale (resp. orthonormée) si $\forall i, j \in I, i \neq j, (x_i, x_j) = 0$ (resp. $\forall i, j \in I, (x_i, x_j) = \delta_{ij}$)

Proposition 1.8

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille finie orthogonale, on a:
$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

Definition 1.9

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet. Comme les parties complètes d'un espace complet sont des parties fermées, alors on a les propositions suivantes.

Proposition 1.10

Un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H muni du produit scalaire restreint à F est un espace de Hilbert si et seulement si F est fermé dans H . Ainsi les sous-espaces de Hilbert sont les sous-espaces vectoriels fermés.

Proposition 1.11 (Théorème de Projection)

Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert H . On a les résultats suivants:

a) $\forall x \in H, \exists x_C \in C$ tel que $\|x - x_C\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$.

On appelle x_C la projection de x sur C et on note

$$x_C = P_C(x)$$

b) Le point $x_C = P_C(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C, \operatorname{Re}(y - x_C, x - x_C) \leq 0$

c) Si C est un sous-espace vectoriel de H la caractérisation en b) s'écrit: $\forall y \in C, (x - x_C, y) = 0$ ($x - x_C \perp C$)

d) L'application projection P_C est **contractante** $H \rightarrow C$
 i.e. $\forall x, y \in H, \|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|y - x\|$

Preuve

a) Unicité et existence

Soient x_C et x'_C deux ^{minima} éléments de la fonction $\|x - \cdot\| \in \mathbb{R}$ définis sur C . Comme C est convexe, le milieu $\frac{x_C + x'_C}{2}$ du segment $[x_C, x'_C]$ appartient à C .

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \|x_C - x'_C\|^2 &= \|(x_C - x) + (x - x'_C)\|^2 \\ &= 2(\|x - x'_C\|^2 + \|x - x_C\|^2) - 4\|x - \frac{x_C + x'_C}{2}\|^2 \\ &= 2(\|x - x'_C\|^2 + \|x - x_C\|^2) - 4\|x - \frac{x_C + x'_C}{2}\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x_C - x'_C\| = 0 \Rightarrow x_C = x'_C$$

Existence.

Soit $x \in H$, la fonction dans $C : y \mapsto \|y - x\|$ est minorée par 0 donc admet une borne inférieure ≥ 0 .

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C minimisante i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

$$\begin{aligned} \forall m, n \in \mathbb{N}, \|y_m - y_n\|^2 &= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 \\ &\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4 \inf_{y \in C} \|x - y\|^2 \text{ avec } \frac{y_m + y_n}{2} \in C \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n, m > N_\varepsilon, \|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Comme C est fermé de H qui est complet, elle admet une limite dans C .

Notons $x_C = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. On a donc $x_C \in C$ et $\|x - x_C\| = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

b) $\forall y \in C$, on considère la fonction $[0, 1] \ni t \mapsto y_t \in C$

tp $y_t = (1-t)x_c + ty$ la quantité $\|x - y_t\|^2$ est un polynôme en t . En effet

$$\begin{aligned}\|x - y_t\|^2 &= \|x - (1-t)x_c - ty\|^2 \\ &= \|(x - x_c) + t(x_c - y)\|^2 \\ &= \|x - x_c\|^2 + t^2\|y - x_c\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - x_c, x_c - y) \quad *\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Supposons x_c minimise $\|x - y\|$, $y \in C$.

$$\forall t \in [0, 1], \|x - y_t\|^2 \geq \|x - x_c\|^2$$

En dérivant $\|x - y_t\|^2$ par rapport à t , on obtient $2t\|y - x_c\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x - x_c, x_c - y)$ et cette doit être positive ou nulle en $t = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(x - x_c, x_c - y) \geq 0$$

$$\text{d'où } \operatorname{Re}(x - x_c, y - x_c) \leq 0$$

Si l'inégalité $\operatorname{Re}(x - x_c, y - x_c) \leq 0$ est vérifiée alors

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x - y_t\|^2 = \|x - x_c\|^2 + \|y - x_c\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x - x_c, x_c - y) \\ &\geq \|x - x_c\|^2\end{aligned}$$

$$\forall y \in C, \|x - x_c\| \leq \|x - y\|$$

c) si C est un s.e.v, alors $x_c \pm y \in C$ quand $y \in C$. Ainsi le critère en b) s'écrit $\forall y \in C, \pm \operatorname{Re}(x - x_c, y) \leq 0$

$$\text{i.e. } \operatorname{Re}(x - x_c, y) \leq 0$$

$$\operatorname{Re}(x - x_c, y) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(x - x_c, y) = 0$$

$\forall x, y \in H$, notons $x_c = P_C(x)$ et $y_c = P_C(y)$

$$\Delta x = x - x_c \quad x = x_c + \Delta x$$

$$\Delta y = y - y_c \quad y = y_c + \Delta y$$

$$\begin{aligned}\|y - x\|^2 &= \|y_c + \Delta y - x_c - \Delta x\|^2 \\ &= \|(y_c - x_c) + (\Delta y - \Delta x)\|^2 \\ &= \|y_c - x_c\|^2 + \|\Delta y - \Delta x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(y_c - x_c, \Delta y - \Delta x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(y_c - x_c, \Delta y - \Delta x) &= \operatorname{Re}(y_c - x_c, y - y_c - x + x_c) \\ &= \operatorname{Re}(y_c - x_c, y - y_c) - \operatorname{Re}(y_c - x_c, x_c - x) \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|y-x\|^2 \geq \|y_0-x\|^2 \quad \|y_0-x\| \leq \|y-x\|$$

d'où $\|y_0-x\| \leq \|x-y\|$.

2.1 Applications

Définition 2.1

Si A est une partie H . On appelle orthogonale de A et on note $A^\perp$ l'ensemble $\{x \in H, \forall a \in A, (x, a) = 0\}$.

Proposition 2.2

Pour toute partie A de H , $A^\perp$ est un sous-espace ^{vectoriel} fermé.

En effet

$\forall a \in A$, on a $a^\perp = \text{Ker}(a, \cdot)$. Or la forme linéaire $x \mapsto (a, x)$ est continue. Donc $a^\perp$ est un s.e.v. fermé. Par ailleurs $A^\perp = \bigcap_{a \in A} a^\perp$ donc $A^\perp$ est un s.e.v. fermé de H .

Remarque 2.3

$\forall A$ et B de H , on a $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
 $A^\perp = (\bar{A})^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$

Proposition 2.4

Si F est un s.e.v. fermé de H , on a les propriétés suivantes

- $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
- Si $F \neq \{0\}$, $\|P_F\| = 1$

$$\bigcup (F^\perp)^\perp = F$$

Proposition 2.5

Un s.e.v. de H est dense si et seulement si son

orthogonal est $\{0\}$.

soit H un espace de Hilbert, $\forall f \in H$, la forme linéaire $H \ni x \mapsto (f|x)$ est continue.

La réciproque est donnée par la proposition suivante

Theorème de représentation de Riesz

Proposition 2.6

Pour toute forme linéaire continue l sur H , il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall x \in H, l(x) = (f|x)$.

En effet

soit l une forme linéaire sur H . On note $F = \text{Ker } l$.
 F est un s.e fermé

Unicité

soit f_1 et f_2 deux éléments de H qui vérifient
 $\forall x \in H, (f_1|x) = l(x) = (f_2|x)$

en prenant $x = f_1 - f_2$, on a

$$(f_1|x) = (f_2|x)$$

$$(f_1 - f_2|x) = 0$$

$$(f_1 - f_2|f_1 - f_2) = \|f_1 - f_2\|^2 = 0$$

$$f_1 = f_2$$

On distingue deux cas :

- si $F^\perp = \{0\}$

$F = (F^\perp)^\perp = H$ et $l = 0$, on prend $f = 0$.

si $F^\perp \neq \{0\}$ alors on prend $u \in F^\perp, \|u\| = 1$

alors $l(u) \neq 0$ et $\forall x \in H, x - \frac{l(x)}{l(u)}u \in \text{Ker } l = F$.

Le produit scalaire

$$(u, x - \frac{l(x)}{l(u)}u) \text{ est nul ce qui donne } l(x) = l(x)(u, u) \\ = l(x)(u, x)$$

$= (f, u)$
avec $f = l(u)u$

Remarque 2.7

Le Théorème de représentation de Riesz nous enseigne
entre sur le dual H' topologique d'un espace de
Hilbert H s'identifie à lui-même.

Exercice 1

Soient E un ensemble non vide et δ une distance sur E . Soit d'autre part $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et vérifiant pour tout $s, t \geq 0$: $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$.

1) Démontrer que la fonction $d = \varphi \circ \delta$ est une distance sur E .

2) Démontrer que les fonctions suivantes possèdent les propriétés exigées pour φ :

$$\text{a) } t \mapsto t^\alpha, \text{ avec } 0 < \alpha \leq 1, \quad \text{b) } t \mapsto \frac{t}{1+t}, \quad \text{c) } t \mapsto \ln(1+t), \quad \text{d) } t \mapsto \min\{1, t\}.$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels positifs et soit p un réel supérieur à 1 ; on définit le réel q par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q est appelé le conjugué de p).

1) Démontrer que : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2) Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels positifs. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{(Hölder)} \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{(Minkowski)} \quad \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 3

Soient (E_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots$ une famille infinie dénombrable d'espaces métriques.

On pose $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ (produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots$). Démontrer que la fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u = (u_1, u_2, \dots) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \dots) \in E, \quad d(u, v) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}$$

est une distance sur E .

Exercice 4

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E . Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne sur A :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall a \in A, \forall b \in A : |f(a) - f(b)| \leq \lambda d(a, b).$$

Pour tout $a \in A$ et pour tout $u \in E$, on pose

$$f_a(u) := f(a) + \lambda d(a, u), \text{ puis } g(u) := \inf\{f_a(u) \mid a \in A\}.$$

Démontrer que g est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à A est égale à f et qui vérifie

$$\forall u \in E, \forall v \in E : |g(u) - g(v)| \leq \lambda d(u, v).$$

Exercice 5

Soient A et B deux parties non vide d'un espace métrique. Montrer que $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$ et $\text{diam } (A \cup B) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$ si $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ ou $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 6

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour $B \subset X$, on pose $\alpha(B) = \overset{\circ}{B}$ et $\beta(B) = \overline{B}$.

- 1) Montrer que A ouvert entraîne $A \subset \alpha(A)$ et A fermé entraîne $\beta(A) \subset A$.
- 2) Montrer que l'on a toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

Exercice 7

Soit (X, d) un espace métrique, φ une jauge continue et $d' = \varphi \circ d$. Montrer que d' est une métrique uniformément équivalente à d .

Exercice 8

Montrer que dans tout espace métrique (E, d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ ne coïncide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a, r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $E = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $1/2$).

Exercice 9

On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X . Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X .

Exercice 10

On désigne par $d(a, b)$ la distance euclidienne usuelle de $a, b \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$\delta(a, b) = \begin{cases} d(a, b) & \text{si } a, b \text{ sont alignés avec l'origine } O \\ d(0, a) + d(0, b) & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ ("distance SNCF") plus fine que la distance usuelle. Dans la suite, on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie associée à δ .
- 2) Soit H le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$; montrer que H est un ouvert; déterminer $\overline{H}$.
- 3) Quelle est la topologie induite sur une droite vectorielle; sur le cercle unité Γ ?
- 4) Lesquelles des transformations suivantes sont continues : homothéties de centre O ; rotations de centre O ; translations?

Exercice 11

On rappelle qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit normal si deux fermés disjoints de X peuvent être séparés par deux ouverts disjoints de X . Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace normal.

- 1) Si O_1 et O_2 sont deux ouverts de X avec $O_1 \cup O_2 = X$, montrer qu'il existent des fermés F_1 et F_2 tels que $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$ et $F_1 \cup F_2 = X$.
- 2) Si $F_1, \dots, F_n$ sont des fermés de X tels que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, montrer qu'il existent des ouverts $O_1, \dots, O_n$ tels que $F_i \subset O_i$, $i = 1, \dots, n$ et $\bigcap_{i=1}^n O_i = \emptyset$.
- 3) Plus généralement, étant données des fermés $F_1, \dots, F_n$, montrer qu'il existent des ouverts $O_1, \dots, O_n$ tels que $F_i \subset O_i$ et

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \implies \bigcap_{i \in I} O_i = \emptyset.$$

★ Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Démontrer que la fonction linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \varphi(f) = f(\frac{1}{2})$ n'est pas continue au point $f = 0$. Est-elle continue en d'autres points de E ?

★ Exercice 2

Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. On muni E de la norme (vérifier qu'il s'agit bien d'une norme) : $\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$.

- 1) Soit $s \in [0; 1]$ fixé. Démontrer que la fonction $\psi_s : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(s)$ est continue en tout point P_0 de E .
- 2) Démontrer que la fonction $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(2)$ n'est continue en aucun point de E .

★ Exercice 3

Soit f la fonction (inventée par Riemann) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie ainsi : $f(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(t) = \frac{1}{q}$ si $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premier entre eux. Démontrer que f est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel.

★ Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $[f \leq \alpha] := \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \leq \alpha\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

★ Exercice 5

Soient (E, d) un espace métrique, $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ deux parties fermées de E telles que $A \cap B = \emptyset$.

Pour tout $u \in E$, on pose $f(u) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$.

- 1) Démontrer que f est continue sur E , que $f(u) = 0 \iff u \in A$, que $f(u) = 1 \iff u \in B$.
- 2) Montrer que $0 < f(u) < 1$ pour tout $u \in E \setminus (A \cup B)$.
- 3) Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- 4) Comment modifier f pour obtenir une fonction g continue, valant -1 sur A , $+1$ sur B et $-1 < g(u) < 1$ pour tout $u \in E \setminus (A \cup B)$?

★ Exercice 6

Soit $E = \mathcal{P}([0; 1], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels restreintes à $[0; 1]$. On muni E de la norme $\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$. Démontrer que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par $P_n(t) := (1 + \frac{t}{n})^n$ est une suite de Cauchy dans E non convergente dans E .

★ Exercice 7

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n réels. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Soit $\Phi : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \forall v \in E : \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|_F \leq M$
- (ii) $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \|u\|_E \leq 1 \implies \|\Phi(u)\|_F \leq C$.

- 1) Démontrez que pour tout $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(1) \quad \left\| \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u) \right\|_F \leq \frac{M}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire que pour tout $u \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u)$ existe dans F . On note $A(u)$ cette limite.

- 2) Démontrez que l'application $A : E \rightarrow F, u \mapsto A(u)$ vérifie $\forall u, v \in E : A(u+v) = A(u) + A(v)$.
- 3) Démontrez que $\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - A(u)\|_F \leq M$. Déduisez-en que A est une application linéaire continue. Démontrez qu'il n'existe qu'une seule application linéaire continue vérifiant cette égalité.

Exercice 8

Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Soit $D \subset E$ une partie dense par rapport à A i.e. $\text{adh}(D) \supset A$. Vérifiez que pour tout $\rho > 0$ fixé, $(B_u)_{u \in D}$ où $B_u := \{v \in E \mid d(u, v) < \rho\}$ est un recouvrement de A .

Exercice 9

On considère l'espace de Hilbert $\ell_{\mathbb{R}}^2 := \{(u_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} u_n^2 < +\infty\}$. Soit K le sous-ensemble de $\ell_{\mathbb{R}}^2$ constitué par les suites $u = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$, $u_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $|u_n| \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Démontrez que K est une partie convexe et compacte de $\ell_{\mathbb{R}}^2$. K est appelé le cube de Hilbert car il est homéomorphe à $[-1; 1]^{\mathbb{N}}$.

Exercice 10

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A et B deux parties non vides de E .

- 1) Démontrez que si A est compact et B fermée alors $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est fermée non compacte en général (donner un exemple).
- 2) Démontrez que si A et B sont compactes alors $A + B$ est compacte.
- 3) Trouver des exemples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ prouvant que si A et B sont seulement fermées alors $A + B$ n'est pas fermée en général.

Exercice 11

On dit qu'un espace métrique (E, d) est un c-espace si toutes ses boules fermées sont compactes.

- 1) A quelle condition un espace vectoriel normé (réel ou complexe) est-il un c-espace ?
- 2) Montrer que $\mathbb{R}^n$ munie de la distance $\frac{d}{1+d}$, où d est la distance euclidienne n'est pas un c-espace. Conclusion ?
- 3) Démontrez qu'un espace métrique (E, d) est un c-espace si et seulement si toute partie fermée et bornée de E est un compact.
- 4) Démontrez que (E, d) est un c-espace si et seulement si de toute suite bornée de E , on peut extraire une sous-suite convergente dans E .

* Exercice 12

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X, x \neq y.$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$. 1) Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.

- 2) Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide.
- 3) Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zéro.
- 4) Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \rightarrow p$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 1 Soit X un espace métrique.

1. Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
2. Soit A une partie de X connexe. Montrer que toute partie $B \subset E$ vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
3. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 0$. Prouver que $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est connexe.

Exercice 2 Soit $T = \{0\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I ; x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire (un théorème de Darboux).

Exercice 4 Soit $\alpha_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application pour laquelle $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in X$, que pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n \geq 0}$ converge vers p et que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p, x_n) \leq \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_{\nu} \right) d(x_1, x_0).$$

Exercice 5 Soit $X = (C^1([0, 1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

TD1

Exercice 6

Soit (X, T) un espace topologique. $\beta C X, \alpha(B) = \overset{\circ}{\bar{B}}, \beta(B) = \overset{\circ}{\bar{\bar{B}}}$

1) Montrons que A ouvert entraîne $A \subset \alpha(A)$ et A fermé entraîne $\beta(A) \subset A$

* Montrons que A ouvert entraîne que $A \subset \alpha(A)$.

on sait que $A \subset \bar{A}$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \bar{\bar{A}}$

Comme A est ouvert alors $\overset{\circ}{A} = A \subset \bar{\bar{A}}$

Ainsi $A \subset \alpha(A)$

* A fermé entraîne $\beta(A) \subset A$.

on sait que $\bar{A} \subset A$. Alors $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A} = A$ car A est fermé

Ainsi $\beta(A) \subset A$

2) Montrons que $\alpha \circ \alpha = \alpha$ et $\beta \circ \beta = \beta$.

On sait que $\alpha(A) = \bar{\bar{A}}$ qui est un ouvert donc d'après 1)

$\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.

Considérons $\bar{A}$. Alors $\beta(\bar{A}) \subset \bar{A}$

Par suite $\beta(\bar{\bar{A}}) \subset \bar{\bar{A}}$

ie $\beta(\bar{\bar{A}}) = \bar{\bar{A}} \subset \bar{\bar{\bar{A}}}$

Soit $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$

Par conséquent $\alpha \circ \alpha = \alpha$

. On sait que $\beta(A) = \bar{\bar{A}}$ qui est un fermé, donc d'après

1) $\beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$.

Considérons $\bar{A}$. Alors $\bar{A} \subset \alpha(\bar{A}) = \bar{\bar{\bar{A}}}$

Par suite $\bar{A} \subset \alpha(\bar{\bar{A}})$ ie $\bar{A} \subset \bar{\bar{\bar{A}}}$

Soit $\beta(A) \subset \beta(\beta(A))$.

Par conséquent $\beta \circ \beta = \beta$.

Exercice 1

$\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

1) Démontrons que $d = \varphi \circ S$ est une distance sur E .
 Soient $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0$.
 $d(x, y) = 0 \iff \varphi(S(x, y)) = 0$
 $\iff \varphi(S(x, y)) = 0$

On sait que $\varphi(0) = 0$ et il est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
 Par suite $S(x, y) = 0$. S étant une distance sur E ,
 alors on a $x = y$.

$$d(x, y) = 0 \implies x = y$$

$$\text{Par ailleurs } d(x, x) = \varphi(S(x, x)) = \varphi(0) = 0$$

Car S est une distance sur E et $\varphi(0) = 0$ par hypothèse.

Soit $(x, y) \in E^2$, on a :

$$d(x, y) = \varphi(S(x, y))$$

$$= \varphi(S(y, x)) \text{ car } S \text{ est une distance sur } E$$

Donc on a $d(x, y) = d(y, x)$ et d est symétrique.

Inégalité triangulaire.

Soient $x, y, z \in E$.

S étant une distance sur E , on a :

$$S(x, y) \leq S(x, z) + S(y, z)$$

Comme φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et sous-additive, on a :

$$\varphi(S(x, y)) \leq \varphi(S(x, z) + S(y, z)) \leq \varphi(S(x, z)) + \varphi(S(y, z))$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

On a $S(x, y) \geq 0 \forall x, y \in E^2$ car S est une distance sur E . φ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$ alors

$$\varphi(S(x, y)) = d(x, y) \geq 0.$$

On peut donc conclure que d est une distance sur E .

2) Démontrons que les fonctions suivantes possèdent les propriétés requises pour φ .

$$b) f(t) = \frac{t}{1+t}$$

$$- f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$$

- Sans de variation

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Sans-additivité.

Soient $t, s \in \mathbb{R}_+$

On a :

$$f(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s}$$

Comme t et $s \in \mathbb{R}_+$ alors on a

$$\frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = f(t) + f(s)$$

Pour suite $f(t+s) \leq f(t) + f(s)$

$$c) h(t) = \ln(1+t).$$

$$- h(0) = 0$$

- h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Soient $s, t \in \mathbb{R}_+$

$$\text{on a } 1+s < t \leq 1+t+s < 1+t+s+ts = (1+t)(1+s)$$

h étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\ln(1+s+t) \leq \ln(1+s) + \ln(1+t)$$

Pour suite $h(s+t) \leq h(t) + h(s)$

$$d) g(t) = \min(1, t)$$

$$g(0) = \min(1, 0) = 0$$

g est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Soient $t, s \in \mathbb{R}_+$. On a $\min(1, t+s) \leq \min(1, t) + \min(1, s)$
~~et chaque dérivée est~~. En effet le tableau suivant
donne des valeurs possibles de $\min(1, t) + \min(1, s)$ et
chaque coefficient est évidemment supérieur à
 $\min(1, t+s)$

$\Delta \backslash t$	$[0, 1]$	$]1, +\infty[$
$[0, 1]$	$t + \Delta$	$\Delta + 1$
$]1, +\infty[$	$1 + t$	2

$$a) m(t) = t^\alpha$$

$$m(0) = 0$$

m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Soit $\Delta \in \mathbb{R}_+$. Considérons la fonction paramétrisée par Δ .

$$m_\Delta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$m_\Delta(t) = m(t + \Delta) - t^\alpha - \Delta^\alpha$$

Étudions les variations de m_Δ .

$$\begin{aligned} m'_\Delta(t) &= \alpha(t + \Delta)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} \\ &= \alpha[(t + \Delta)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] \end{aligned}$$

m_Δ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $m_\Delta(0) = 0$ alors $m_\Delta(t) \leq 0$. Par suite $m(\Delta + t) \leq m(t) + m(\Delta)$.

Exercice 8

Montrons que dans tout espace métrique (E, d) , une boule fermée est un fermé.

Soient $B'(a, r)$ une boule fermée de (E, d) et $C = E \setminus B(a, r)$.

Montrons que C est un ouvert de (E, d) .

Soit $x \in C$, alors $x \notin B'(a, r)$ i.e. $d(a, x) > r$
Posons $\delta = \frac{d(a, x) - r}{2} > 0$.

Montrons que $B(x, \delta) \subset C$.

Soit $y \in B(x, \delta)$ alors $d(x, y) < \delta$

or $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$
 donc $d(a, y) - d(a, x) \leq d(x, y)$
 Par ailleurs $|d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y)$
 De plus $d(a, x) - d(a, y) \leq |d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y)$
 $d(a, x) - d(a, y) \leq d(x, y) \Rightarrow d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y)$
 $d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > d(a, x) - \delta$
 $d(a, y) > d(a, x) - \frac{d(a, x) - r}{2}$

$$d(a, y) > \frac{2d(a, x) - d(a, x) + r}{2}$$

$$d(a, y) > \frac{d(a, x) + r}{2} > \frac{r + r}{2} = r$$

$d(a, y) > r$ i.e. $y \notin B'(a, r)$ d'où $y \in B(a, r) \setminus B'(a, r) \Rightarrow y \in C$
 Par suite C est un ouvert.

Ainsi $B'(a, r)$ est un fermé.

2) Montrons que l'adhérence d'une boule ouverte ne coïncide pas nécessairement avec la boule fermée
 $a = (\frac{1}{2}, 0)$ et $r = \frac{1}{2}$.

$$E = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1].$$

$$(x, y) \in B(a, r) \Leftrightarrow \begin{cases} |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \\ |y - 0| < \frac{1}{2} \end{cases} *$$

$$(x, y) \in [0, 1] \times \{0\} : * \Rightarrow x \in]0, 1[\text{ et } y = 0.$$

$$(x, y) \in \{0\} \times [0, 1] : * \Rightarrow x = 0 \text{ et } y \in]0, \frac{1}{2}[$$

$$\overline{B(a, r)} =]0, 1[\times \{0\}.$$

$$B(a, r) = [0, 1] \times \{0\}.$$

$$(x, y) \in B'(a, r) \Leftrightarrow \begin{cases} |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \\ |y - 0| \leq \frac{1}{2} \end{cases} (**).$$

$$(x, y) \in [0, 1] \times \{0\} : (***) \Rightarrow x \in [0, 1] \text{ et } y = 0.$$

$$|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$$

$$(x, y) \in \{0\} \times [0, 1] : *** \Rightarrow x = 0 \text{ et } y \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$\text{Ainsi } \overline{B(a, r)} = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, \frac{1}{2}].$$

$$\text{Par conséquent } \overline{B(a, r)} \neq B'(a, r)$$

Exercice 3

Soit $(E_i, d_i) \quad i = 2, 2, \dots, n$

$$E = \prod_{i=2}^n E_i$$

$$d_i: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall U = (u_1, u_2, \dots) \in E$$

$$\forall V = (v_1, v_2, \dots) \in E$$

$$d(U, V) = \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^i} \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}$$

Montrons que d est une distance sur E

Vérifions que d est bien définie.

$$\forall i, \quad 0 \leq \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{2^i} \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} \leq \frac{1}{2^i}$$

$$0 \leq d(U, V) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$0 \leq d(U, V) \leq 1$$

donc d est bien définie

$$* \quad d(U, V) = 0$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} = 0$$

$d_i(u_i, v_i) = 0$ et Comme d_i est une distance sur E_i , $\forall i, u_i = v_i \Rightarrow U = V$.

$$d(U, V) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} = 0$$

$$\text{Car } d_i(u_i, v_i) = 0$$

Par conséquent

$$d(U, V) = 0 \iff U = V$$

* Symétrie

on a $d_i(u_i, v_i) = d_i(v_i, u_i)$
 car d_i est une distance sur E_i . On a alors

$$\begin{aligned}
 d(u, v) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(v_i, u_i)}{1 + d_i(v_i, u_i)} \\
 &= d(v, u)
 \end{aligned}$$

Par conséquent $d(u, v) = d(v, u)$

* Inégalité triangulaire
 Considérons la fonction

$$\begin{aligned}
 \varphi: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 t &\longmapsto \frac{t}{1+t}
 \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \text{ d'où } \varphi \text{ est strictement croissante.}$$

on a $\varphi(0) = 0$ et $\forall t, \varphi(t) \neq 0$
 soient $u, v, w \in E$.

Or, on a $d_i(u_i, v_i) \leq d_i(u_i, w_i) + d_i(w_i, v_i)$

Comme φ est croissante, on a :

$$\varphi(d_i(u_i, v_i)) \leq \varphi(d_i(u_i, w_i) + d_i(w_i, v_i))$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} &\leq \frac{d_i(u_i, w_i) + d_i(w_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, w_i) + d_i(w_i, v_i)} \\
 &\leq \frac{d_i(u_i, w_i)}{1 + d_i(u_i, w_i) + d_i(w_i, v_i)} + \frac{d_i(w_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i) + d_i(w_i, v_i)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} \leq \frac{d_i(u_i, w_i)}{1 + d_i(u_i, w_i)} + \frac{d_i(w_i, v_i)}{1 + d_i(w_i, v_i)}$$

En multipliant par $\frac{1}{2^i}$ et en passant à la somme, on obtient $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Donc d est une distance sur E .

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p > 1$, on définit q par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1) Montrons que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

La fonction $h(x) = e^x$ est 2 fois dérivable et $h''(x) = e^x > 0$ donc h est convexe. Par conséquent

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in [0, 1]$, on a :

$$h(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha h(x) + (1-\alpha)h(y)$$

Posons $\alpha = \frac{1}{p}$, $x = \ln a^p$, $y = \ln b^q$

on a bien $\alpha \in]0, 1[$ et $1-\alpha = \frac{1}{q}$

$$e^{(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q)} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q}$$

$$e^{\ln(ab)} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q}$$

$$\text{donc } ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

2) Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$.

Démontrons les inégalités suivantes

* Hölder $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$

La fonction $f(x) = e^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^x > 0$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, Posons

$$\alpha_k = a_k \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{-\frac{1}{p}} \quad \beta_k = b_k \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-\frac{1}{q}}$$

D'après la question 1), on a :

$$\alpha_k \beta_k \leq \frac{\alpha_k^p}{p} + \frac{\beta_k^q}{q}$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \alpha_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n \beta_k^q$$

$$\sum_{k=2}^n a_k b_k \left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=2}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=2}^n a_k \left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{-\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} \sum_{k=2}^n b_k \left(\sum_{i=2}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\sum_{k=2}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=2}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{donc } \sum_{i=2}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=2}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

L'inégalité de Minkowski

on a $(a_i + b_i)^p \leq (a_i + b_i)^{p-1} (a_i + b_i) \forall a_i \text{ et } b_i \text{ i.e. } a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \leq \sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^{p-1} a_i + \sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^{p-1} b_i$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \leq \left(\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=2}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=2}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

on a $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

$$\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \leq \left(\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=2}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad (*)$$

si $\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p = 0$ alors $a_i = b_i = 0$ et dans ce cas l'inégalité est vérifiée.

supposons que $\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \neq 0$ alors $(*)$ devient

$$1 \leq \left(\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=2}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\text{donc } \left(\sum_{i=2}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=2}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=2}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 9

Soit C_0 l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Montrons que Y est fermé dans X .

verifions que d est une distance sur X .

Soit $x, y \in X$

Comme x et y sont bornées alors $\exists M \in \mathbb{R}_+ \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M$ et $|y_n| \leq M$

$$0 \leq |x_n - y_n| \leq 2M, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq d(x, y) \leq 2M.$$

Ainsi d est bien définie

Soit $x, y \in X$

$$d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$$

$$= \sup_n |y(n) - x(n)|$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

* Soit $x, y \in X / d(x, y) = 0$.

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Rightarrow \sup_n |x(n) - y(n)| = 0 \\ &\Rightarrow |x(n) - y(n)| = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$\text{si } x = y, d(x, x) = \sup_n |x(n) - x(n)| = 0$$

$$\text{Ainsi } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

* Soient $x, y, z \in X$.

$$|x(n) - y(n)| \leq |x(n) - z(n)| + |z(n) - y(n)|$$

En passant au sup, on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_n |x(n) - y(n)| &\leq \sup_n (|x(n) - z(n)| + |z(n) - y(n)|) \\ &\leq \sup_n |x(n) - z(n)| + \sup_n |z(n) - y(n)| \end{aligned}$$

$$\text{d'où } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Par conséquent d est une distance sur X .

Montrons que $Y \subset X$

Soit $y(n) \in Y$

Alors, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |y(n)| \leq 1$

On en déduit que

$$|y(n)| \leq \max\{|y_0|, \dots, |y_n|\} \in \mathbb{R}_+^*$$

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $Y \subset X$

* Montrons que Y est fermé.

Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset Y / x_p \rightarrow x \in X$

$$x_p(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_p(n) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon, |x_p(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Aussi, } \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall p \geq p_\varepsilon, d(x_p, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Posons } N = \max\{n_\varepsilon, p_\varepsilon\}$$

Pour $n \geq N$

$$\text{on a } |x(n)| \leq |x_p(n) - x(n)| + |x_p(n)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi x converge vers $x \in Y$.

D'après la caractérisation séquentielle des fermés, on déduit que Y est un fermé de X .

Montrons que C_0' est dense dans Y

Soit $x \in Y$

Montrons qu'il existe une suite $(z_p) \subset C_0' / \lim_{p \rightarrow \infty} z_p = x$

Considérons la suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 = (x(0), 0, \dots) \in C_0'$$

$$z_1 = (x(0), x(1), 0, \dots, 0) \in C_0'$$

$$z_p = (x(0), \dots, x(p), \dots, 0) \in C_0' \quad \forall p \in \mathbb{N} \text{ et}$$

$$d(z_p, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_p(n) - x(n)|$$

$$= \sup_{n \geq p} |x(n)|$$

Comme x converge vers 0, Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |x(n)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Ainsi $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers x d'où C_0' est dense dans Y .

Montrons que C_0 n'est pas dense dans X
Prendons Raisonnons par l'absurde
Prendons $x_n = (-1)^n$

Exercice 7

φ est une jauge d'application alors φ est définie
de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(0) = 0$; $\varphi(x) > 0$, $x > 0$.

φ est croissante et est sous-additive. i.e.

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Montrons que d' est une distance
métrique uniformément équivalente à d .

Montrons que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels
positifs converge vers 0 si et seulement si la
suite $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0.

Par continuité de φ , $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers
 $\varphi(0) = 0$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, telle que
 $\varphi(x_n)$ converge $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Alors $\exists \alpha > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N$, $x_n > \alpha$, $\forall n$
 $\varphi(x_n) > \varphi(\alpha) > 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) > \varphi(\alpha) > 0$.

$0 \not\geq \varphi(\alpha) > 0$, absurde.

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, converge vers u pour la
métrique d .

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u pour
 d' .

$$U_n \xrightarrow{d} U \Rightarrow d(U_n, U) \rightarrow 0$$

Ponons $u_n = d(U_n, U)$

$$\text{on a } u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \phi(u_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow d'(U_n, U) \rightarrow 0$$

Réciproquement, soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergent vers U pour d' .

$$U_n \xrightarrow{d'} U \Rightarrow d'(U_n, U) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \phi(d(U_n, U)) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow d(U_n, U) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow U_n \xrightarrow{d} U$$

on conclut que d et d' sont deux métriques uniformément équivalentes sur X .

Exercice 11

1) Montrons que si O_1 et $O_2 \in \mathcal{T}$ avec $O_1 \cup O_2 = X$ alors il existe F_1 et F_2 deux fermés tels que $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$ et $F_1 \cup F_2 = X$.

Soit $f: (X, \mathcal{T})$ est normal pour $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ entraîne que il existe $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ et $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$.

Ponons $G_1 = O_1^c$; $G_2 = O_2^c$.

G_1 et G_2 sont ouverts. Ainsi, il va exister W_1 et W_2 tq $G_1 \subset W_1$ et $G_2 \subset W_2$ et $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Ponons $F_1 = W_1^c$ et $F_2 = W_2^c$.

Donc il existe F_1 et F_2 tels que $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$ et $F_1 \cup F_2 = X$.

2) si $F_1, \dots, F_n$ sont fermés tels que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, montrons qu'il existe des ouverts $O_1, \dots, O_n$ tels que $F_i \subset O_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ et $\bigcap_{i=1}^n O_i = \emptyset$.

$$\bigcap_{i=2}^n F_i = \emptyset \Rightarrow F_1 \cap \bigcap_{i=2}^n F_i = \emptyset$$

$\Rightarrow F_1$ est disjoint avec $\bigcap_{i=2}^n F_i$

Par suite, il existe $O_1, G_1 \in \mathcal{T}$ tq $F_1 \subset O_1$
 $\bigcap_{i=2}^n F_i \subset G_1$ et $O_1 \cap G_1 = \emptyset$

$$\begin{aligned} O_1 \cap G_1 = \emptyset &\Rightarrow O_1 \subset G_1^c \subset \left(\bigcap_{i=2}^n F_i\right)^c \\ &\Rightarrow \bar{O}_1 \subset G_1^c \subset \left(\bigcap_{i=2}^n F_i\right)^c \end{aligned}$$

Car G_1^c est un fermé.

Par suite $\bar{O}_1 \cap \bigcap_{i=2}^n F_i = \emptyset$ et $(\bar{O}_1, F_2, \dots, F_n)$ est une famille de fermés.

En faisant jouer le rôle de F_1 par F_2 , il existe un ouvert O_2 tel que $F_2 \subset O_2 \subset \bar{O}_2 \subset \left(\bar{O}_1 \cap \bigcap_{i=3}^n F_i\right)^c$

De proche en proche, on obtient $(O_1, \dots, O_n)$ une famille d'ouverts tels que $F_i \subset O_i$ $\forall i = \{1, \dots, n\}$ et $\bigcap_{i=1}^n \bar{O}_i \subset \bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$.
 alors $\bigcap_{i=1}^n \bar{O}_i = \emptyset$, donc la famille $(O_1, \dots, O_n)$ répond à la question.

3) Etant données des fermés $F_1, \dots, F_n$, montrons qu'il existe des ouverts $O_1, \dots, O_n$ tq $F_i \subset O_i$ et $\bigcap_{i=1}^n \bar{O}_i = \emptyset$.

Soit $E = \{I \subset \{2, \dots, n\} \mid F_1 \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset\}$

Poseons $S = \bigcup_{I \in E} \bigcap_{i \in I} F_i$, S est un fermé de $\mathcal{T}$ et $F_1 \cap S = \emptyset$ alors F_1 et S sont disjoints

donc il existe $O_1, G_1 \in \mathcal{T}$ tel que $F_1 \subset O_1$
 $S \subset G_1$ et $O_1 \cap G_1 = \emptyset \Rightarrow O_1 \subset G_1^c$
 $\Rightarrow O_1 \subset \bar{O}_1 \subset G_1^c \subset S^c$

La famille $(\bar{O}_1, F_2, \dots, F_n)$ a par construction les mêmes propriétés que $(F_1, \dots, F_n)$ et on recommence

Exercice 4

Montrons que g est bien définie ie $g(u) > -\infty$
 $\forall u \in E$.

Soit $u \in E$. Par définition de $\inf$

$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A \mid f_{a_\varepsilon}(u) \leq g(u) + \varepsilon$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$ il existe $a_1 \in A$ tq
 $f_{a_1}(u) \leq g(u) + 1$.

$$f(a_1) + \lambda d(u, a_1) \leq g(u) + 1$$

$g(u) > f(a_1) + \lambda d(u, a_1) - 1 > -\infty$. Donc g est bien définie.
 $f_a : E \rightarrow \mathbb{R}$

Montrons que f_a est λ -lipschitzienne ie $\forall u, v \in E$
 $|f_a(u) - f_a(v)| \leq \lambda d(u, v)$.

Soit $u, v \in E$, on a

$$|f_a(u) - f_a(v)| = |f(a) + \lambda d(a, u) - f(a) - \lambda d(a, v)|$$

$$|f_a(u) - f_a(v)| = \lambda |d(a, u) - d(a, v)|$$

$$= \lambda |d(a, u) - d(a, v)|$$

$$= \lambda |d(u, a) - d(v, a)|$$

$$\leq \lambda d(u, v)$$

Donc f_a est λ -lipschitzienne.

Montrons maintenant que g est λ -lipschitzienne.

Soient $u, v \in E$ et $a \in A$, on a

$$f_a(u) \leq f_a(v) + \lambda d(u, v).$$

En passant à l'inf, on a :

$$\inf(f_a(u)) \leq \inf(f_a(v) + \lambda d(u, v))$$

$$g(u) \leq g(v) + \lambda d(u, v)$$

De même, on a $g(v) \leq g(u) + \lambda d(u, v)$

$$\text{Ainsi, } |g(u) - g(v)| \leq \lambda d(u, v).$$

Donc g est λ -lipschitzienne.

Montrons que g est une fonction dont la restriction à A
 est f . $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subseteq E$. Soit $u \in A$. On a que

$$g(u) = \inf_{a \in A} f_a(u)$$

$$g(u) = \inf_{a \in A} \{f(u) + \lambda d(a, u)\}$$

$$= \inf_{a \in A} \{f + \lambda d(a, u)\}$$

$$g(u) \leq f(a) + \lambda d(a, u) \quad \forall a \in A$$

En particulier pour $a = u$,

$$g(u) \leq f(u)$$

Comme f est lipschitzienne sur A , on a

$$f(u) \leq f(a) + \lambda d(a, u) \quad \forall u, a \in A.$$

$$f(u) \leq \inf_{a \in A} f(u) = g(u) \quad \text{D'où}$$

$$f(u) = g(u) \quad \forall u \in A.$$

La restriction de g sur A est f .

TD2

Exercice

Soit $E = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$

$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$

$f \mapsto \varphi(f) = f(\frac{1}{2})$

Démontrons que φ n'est pas continue en 0.

Il suffit de trouver $(f_n)_n \subset E$ qui converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_1$ et $\varphi(f_n)$ ne convergent pas vers 0.

Posons $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ nt + 1 - \frac{n}{2} & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ -nt + 1 + \frac{n}{2} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

* $f_n \in E$ (Il suffit de voir que f_n est affine et continue par morceaux sur $[0, 1]$).

$$\begin{aligned} * \|f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t)| dt \\ &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} |f_n(t)| dt \\ &= 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_1 = 0$$

Ainsi $(f_n)_{n \geq 3} \rightarrow 0$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

$$\varphi(f_n) = f_n(\frac{1}{2}) = 1$$

$$\text{donc } (\varphi(f_n))_{n \geq 3} \rightarrow 1$$

Par conséquent φ n'est pas continue en 0.

Comme φ est une application linéaire, si φ est non continue en 0 φ est non continue en aucun point de E

Exercice 4

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant pour $\alpha \in \mathbb{R}, [f \leq \alpha] = \{t \in \mathbb{R} / f(t) \leq \alpha\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
Vérifions si f est continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit de trouver une fonction

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ t & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

φ est discontinue en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$[\varphi \leq \alpha] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } 1 \leq \alpha \end{cases}$$

$[\varphi \leq \alpha]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Donc $[f \leq \alpha]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ n'implique pas f continue.

Exercice 12

Soit (X, d) un espace métrique compact et

$f: X \rightarrow X$ une application vérifiant :

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x, y \in X, x \neq y.$$

1) Justifions que f peut avoir au plus un point fixe.
Supposons que f a deux points fixes.

Si x et y sont deux points fixes de f avec $x \neq y$ alors on a : $d(f(x), f(y)) = d(x, y) < d(x, y)$.

Ce qui est absurde donc $x = y$. D'où le résultat.

2) Montrons que les ensembles $X_n = f^n(X)$ n'ont pas

forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide.
On a f continue et X compact, alors $X_1 = f(X)$ est compact.

2) Montrons que les ensembles $X_n = f^n(X)$ $n \in \mathbb{N}$ forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ n'est pas vide.

On a f continue et X compact alors $X_1 = f(X)$ est compact par récurrence. Si X_{n-1} est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact.

De plus $f: X \rightarrow X$. Donc $f(X) \subset X$

$$X_1 \subset X \Rightarrow f(X_1) \subset f(X)$$

$\Rightarrow X_2 \subset X_1$ par récurrence.

On aura que $X_n \subset X_{n-1} \subset \dots \subset X_1 \subset X$.

Par conséquent $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de compacts.

Soit $x_n \in X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $(x_n)_{n \geq 0} \subset X_0 = X$ car $(X_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Comme X est compact alors $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une valeur d'adhérence $x \in X$. Sans perte de généralité on note encore $(x_n)_{n \geq 0}$ la sous-suite qui converge vers x .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N,$$

$d(x_n, x) < \varepsilon$, donc $x \in X_n, \forall n \geq N$ car X_n est compact.

Comme $(X_n)_{n \geq 0}$ est décroissante ie $X_n \subset X_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, X_n \subset X_N \subset X_{N-1} \subset \dots \subset X_0 = X$.

Donc $x \in X_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Donc $x \in \bigcap_{n \geq 0} X_n = Y \neq \emptyset$.

3) Montrons que Y est un ensemble invariant par f .

ie $f(Y) = Y$

* Montrons que $Y \subset f(Y)$

Soit $y \in Y$, alors $\forall n \geq 0, y \in X_n$ ie $f(Y) \in f(X_n) = X_{n+1}$. Donc $\forall n \geq 1$ il existe $x_n \in X_{n-1} / y = f(x_n)$ ou $(x_n) \subset X$ qui est compacte. Alors on peut extraire une sous-suite $(x_{p(n)})_{n \geq 0}$.

De ce qui précède $x \in Y$. Comme f est continue, alors $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{p(n)}) = y$.

$y = f(x) \in f(Y)$

D'où $Y \subset f(Y)$

* Montrons que $f(Y) \subset Y$.

$f(Y) \subset \bigcap_{n \geq 0} f(X_n) = \bigcap_{n \geq 0} X_{n+1} = Y$.

Car $\forall n \geq 0, X_{n+1} \subset X_n$.

Ainsi f est Y est invariant par f .

De plus on a le diamètre de cet ensemble est 0 ie $\text{diam } Y = 0$

Supposons que $\text{diam } Y \neq 0$.

Il existe y et $y' \in Y / d(y, y') = \text{diam } Y > 0$

Comme Y est invariant par f , $\exists x, x' \in Y / f(x) = y, f(x') = y'$

Alors $d(f(x), f(x')) = d(y, y') = \text{diam } Y$

4) Concluons que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$, la suite $x_n = f^n(x_0) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme $\text{diam } Y = 0$, alors Y est réduit à un seul point.

Exercice 2

$$\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$$

Montrons que $\|\cdot\|_E$ est une norme.

1) Soit $s \in [0, 1]$ fixé.

Montrons que la fonction $\psi_s: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto P(s)$ est

Continue en tout point P_0 de E .

Montrons que ψ_s est lipschitzienne.

Soient P et $P_0 \in E$

$$|\psi(P) - \psi(P_0)| = |P(s) - P_0(s)|$$

$$|\psi(P) - \psi(P_0)| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} |P(s) - P_0(s)|$$

$$|\psi(P) - \psi(P_0)| \leq \|P - P_0\|$$

ψ est 1-lipschitzienne donc elle est Continue.

2) Montrons que la fonction $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto P(2)$

n'est Continue en aucun point de E .

$\forall n \in \mathbb{N}$, Posons

$$P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto P_n(t) = \frac{t^n}{2^n}$$

$$\|P_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\phi(P_n) = P_n(2) = \frac{2^n}{2^n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Concluons $\|P_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\phi(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$1 \neq 0$ d'où ϕ n'est pas Continue en 0. Il suffit de constater que ϕ est linéaire pour conclure que ϕ n'est Continue en aucun point de E .

Exercice 3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

• Montrons que f est discontinue en tout point rationnel

Soit $t \in \mathbb{Q}$, considérons la suite $(t_n)_n$ définie par : $t_n = t + \frac{\sqrt{3}}{n}$, $\forall n \geq 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ et $f(t_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$

car $t_n \notin \mathbb{Q}$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = 0 \neq f(t)$ car $t \in \mathbb{Q}$.

Donc f n'est pas continue en t .

Ainsi f est discontinue pour tout point rationnel

• Montrons que f est continue pour tout point irrationnel.

Supposons que f n'est pas continue en t_0 .

Soit $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\exists \varepsilon > 0$

$$|f(t)| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{q} \geq \varepsilon \\ \Rightarrow n \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Exercice 5

$A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$

1) Montrons que f est continue sur E .
Soit $u \in E \mid d(u, A) + d(u, B) = 0$

$$\Rightarrow d(u, A) = 0 \text{ et } d(u, B) = 0$$

$$\Rightarrow u \in \bar{A} = A \text{ et } u \in \bar{B} = B.$$

$$\Rightarrow u \in A \cap B = \emptyset \text{ Absurde}$$

Donc un tel u n'existe pas, f est bien définie.

Considérons l'application

$$\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto d(u, A)$$

Soient $u, v \in E$

On a: $\forall x \in A,$

$$d(u, x) \leq d(u, v) + d(v, x)$$

$$\text{donc } \inf_{x \in A} d(u, x) \leq d(u, v) + \inf_{x \in A} d(v, x).$$

$$d(u, A) \leq d(u, v) + d(v, A).$$

$$\text{donc } |\varphi_A(u) - \varphi_A(v)| = |d(u, A) - d(v, A)| \leq d(u, v).$$

Il en résulte que φ est continue sur E .

On en déduit que $f = \frac{\varphi_A}{\varphi_A + \varphi_B}$ est continue.

Montrons que $f(u) = 0 \iff d(u, A) = 0 \iff u \in A$

$$f(u) = 0 \iff d(u, A) = 0 \iff u \in \bar{A} = A$$

$$f(u) = 1 \iff u \in B.$$

$$f(u) = 1 \iff d(u, B) = 0 \iff u \in \bar{B} = B.$$

$u \in E \setminus (A \cup B)$

$$u \notin A = \bar{A} \implies d(u, A) > 0.$$

$$u \notin B = \bar{B} \implies d(u, B) > 0$$

$$d(u, A) + d(u, B) > d(u, A)$$

$$0 < \frac{1}{d(u,A) + d(u,B)} < \frac{1}{d(u,A)}$$

$$0 < \frac{d(u,A)}{d(u,A) + d(u,B)} < \frac{d(u,A)}{d(u,A)}$$

Donc $0 < f(u) < 1$

3°) Montrons qu'il existe U, V des ouverts de E tel que $A \subset U, B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$

Prenons $U = f^{-2}\left(\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right)$
 $V = f^{-2}\left(\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]\right)$

• U et V sont ouverts car images réciproques d'ouverts par une application continue

• $A \subset U$ car $f(A) = \{0\} \subset \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

• $B \subset V$ car $f(B) = \{1\} \subset \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$

• $U \cap V = \emptyset$

En effet $U \cap V = f^{-2}\left(\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right) \cap f^{-2}\left(\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]\right)$
 $= f^{-2}\left(\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \cap \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]\right)$
 $= f^{-2}(\emptyset) = \emptyset$

4°) Prenons $g(u) = -1 + 2f(u)$.

$$g(u) = \frac{-d(u,A) - d(u,B) + 2d(u,A)}{d(u,A) + d(u,B)}$$

$$= \frac{d(u,A) - d(u,B)}{d(u,A) + d(u,B)}$$

Exercice 7

1°) Démonstration de (1).

Procédons par récurrence sur n .

* Pour $n=1$, on a:

$$\left\| \frac{1}{2} \Phi(2u) - \Phi(u) \right\|_F = \frac{1}{2} \left\| \Phi(u+u) - \Phi(u) - \Phi(u) \right\|_F$$

d'après (ii), $\left\| \frac{1}{2} \Phi(2u) - \Phi(u) \right\|_F \leq \frac{1}{2} M$

La proposition est donc vraie pour $n=1$
supposons la vraie à l'ordre n et vérifions à l'ordre $n+1$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2^{n+1}} \Phi(2^{n+1}u) - \Phi(u) \right\|_F &= \left\| \frac{1}{2^{n+2}} \Phi(2 \times 2^n u) - \Phi(u) \right\|_F \\ &= \left\| \frac{1}{2^{n+2}} \Phi(2^n u + 2^n u) - \Phi(u) \right\|_F \\ &= \left\| \frac{1}{2^{n+2}} [\Phi(2^n u + 2^n u) - \Phi(2^n u) - \Phi(2^n u)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u) \right\|_F. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2^{n+1}} \Phi(2^{n+1}u) - \Phi(u) \right\|_F &\leq \frac{1}{2^{n+2}} \left\| \Phi(2^n u + 2^n u) - \Phi(2^n u) - \Phi(2^n u) \right\|_F \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u) \right\|_F. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2^{n+1}} \Phi(2^{n+1}u) - \Phi(u) \right\|_F &\leq \frac{1}{2^{n+2}} M + \frac{M}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right) \end{aligned}$$

La proposition est donc vraie pour $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a :

$$\left\| \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u) \right\|_F \leq \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) (u).$$

Déduction.

* Montrons que $\left(\frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) \right)_{n \geq 1}$ est de Cauchy.

Calculons $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

Soit $U_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \geq 1$

$(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $u = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

$$\sum_{i=1}^n U_i = U_1 \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$$

$$\Rightarrow \|\frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u)\|_F \leq M(1 - \frac{1}{2^n})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{2^{n+p}} \Phi(2^{n+p} u) - \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u)\|_F &= \|\frac{1}{2^n} [\frac{1}{2^p} \Phi(2^{n+p} u) - \Phi(2^n u)]\|_F \\ &= \frac{1}{2^n} \|\frac{1}{2^p} \Phi(2^p \times 2^n u) - \Phi(2^n u)\|_F \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^p} M(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}})$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} M \times 2(1 - \frac{1}{2^p})$$

$$\leq \frac{1}{2^n} M(1 - \frac{1}{2^p}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$(\frac{1}{2^n} \Phi(2^n u))_{n \geq 1}$ est donc de Cauchy et comme F est complet, la suite converge. D'où l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) = A(u) \in F$

2°) Montrons que $A: E \rightarrow F$

Vérifie $A(u+v) = A(u) + A(v)$ $u \mapsto A(u)$

Soient u et $v \in E$.

$\forall n \geq 1$, on a :

$$\|\frac{1}{2^n} \Phi(2^n(u+v)) - \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \frac{1}{2^n} \Phi(2^n v)\|_F =$$

$$\frac{1}{2^n} \|\Phi(2^n u + 2^n v) - \Phi(2^n u) - \Phi(2^n v)\|_F.$$

$$\leq \frac{1}{2^n} M \text{ d'après i.}$$

$$\text{ou } \frac{1}{2^n} M \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

et comme la norme est continue sur F et comme la limite d'une somme est égale à la somme des limites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n(u+v)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n u) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n v) = 0$$

$$A(u+v) = A(u+v) - A(u) - A(v) = 0$$

Par suite $A(u+v) = A(u) + A(v)$.

3) Démonstration

$$\|\phi(u) - A(u)\|_F = \|\phi(u) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n u)\|_F$$

Par suite comme la norme sur F est continue on a :

$$\|\phi(u) - A(u)\|_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{2^n} \phi(2^n u) - \phi(u) \right\|_F$$

d'après 1), on a :

$$\|\phi(u) - A(u)\|_F \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq M$$

Ainsi $\sup_{u \in E} \|\phi(u) - A(u)\| \leq M$.

* Continuité de A .

$$\begin{aligned} \text{Soit } u \in E, \|A(u)\|_F &= \|A(u) - \phi(u) + \phi(u)\|_F \\ &\leq \|A(u) - \phi(u)\| + \|\phi(u)\|_F \end{aligned}$$

Si $\|u\|_E \leq 1$, d'après (ii) $\|\phi(u)\|_F \leq C$

Par suite $\sup_{\|u\|_E \leq 1} \|A(u)\|_F \leq M + C$.

Ainsi A est bornée sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} A(\alpha u) &= A(\alpha - \alpha_n + \alpha_n)u \\ &= A(\alpha - \alpha_n)u + \alpha_n A(u). \end{aligned}$$

Sont t_n une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\|\alpha - \alpha_n\|_E < t_n \leq 2\|\alpha - \alpha_n\|_E$

$$\begin{aligned} \|A(\alpha - \alpha_n)u\| &= \|A(\frac{t_n}{t_n}(\alpha - \alpha_n)u)\|_E \\ &= t_n \|A(\frac{\alpha - \alpha_n}{t_n}u)\| \\ &\leq t_n M \\ &\leq 2M \|\alpha - \alpha_n\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Il vient que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, A(\alpha u) = \alpha A(u)$

D'où A est linéaire.

A étant linéaire et bornée sur $\overline{B(0, 1)}$, alors elle est continue.

Démontrons qu'il n'existe qu'une seule appl. linéaire continue vérifiant cette inégalité.

Supposons qu'il existe deux applications linéaires vérifiant cette inégalité.

Soient A et A' ces deux applications linéaires telles que $A \neq A'$.

On a :

$$\sup_{u \in E} \|\phi(u) - A(u)\|_F \leq M \quad (1)$$

$$\sup_{u \in E} \|\phi(u) - A'(u)\|_F \leq M \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \|(A - A')(u)\| &= \|A(u) - \phi(u) - A'(u) + \phi(u)\|_F \\ &\leq \|\phi(u) - A(u)\|_F + \|\phi(u) - A'(u)\|_F \\ &\leq 2M. \end{aligned}$$

Donc l'application linéaire $A - A'$ est bornée sur E .

Par conséquent $\text{Ker}(A-A') = E$ Absurde.
 Car $A \neq A'$.
 D'où l'unicité de l'application linéaire.

Exercice 10

Démontrons que si A est compact et B fermé
 alors $A+B = \{a+b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$ est fermé non
 compact en général.

soit $x \in A+B$, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$
 telle que $x_n = a_n + b_n \rightarrow x$.

Comme A est compacte alors il existe une sous-suite
 $(a_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de a_n qui converge vers $a \in A$, alors
 la sous-suite $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de (b_n) converge vers $x-a$
 $\in B$ car B est fermé.

En posant $b = x-a$ alors $x = a+b \in A+B$.

Par conséquent $A+B$ est fermé.

Exemple

$$A = \{(1, 1)\}; \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

$$A+B = B.$$

A compacte de $\mathbb{R}^2$; B fermée de $\mathbb{R}^2$ et $A+B = B$ fermée
 non compacte de $\mathbb{R}^2$.

2) Démontrons que si A et B sont compactes,
 alors $A+B$ est compact.

L'image d'un compact par une application
 continue est compact.

L'application $\varphi: E \times E \rightarrow E$
 $(a, b) \mapsto a+b$ est continue

Par conséquent $\varphi(A \times B) = A+B$ est compact

3) Exemple dans $\mathbb{R}$
 $\mathbb{Z}$ et $\alpha \mathbb{Z}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ sont des fermés, alors que
 $\mathbb{Z} + \alpha \mathbb{Z}$ n'est pas un fermé car $\mathbb{Z} + \alpha \mathbb{Z}$ est
dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } xy = 1\}$ est fermé

$B = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est fermé

$A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est non fermé

Exercice 6

$E = \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\|P\| = \max_{t \in [0, 1]} |P(t)|$

Démontrons que $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par $P_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ est une suite de Cauchy non convergente dans E .

Soit $n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |P_{n+p}(t) - P_n(t)| &= P_{n+p}(t) - P_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n+p}\right)^{n+p} - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \\ &= e^{(n+p) \ln\left(1 + \frac{t}{n+p}\right)} - e^{n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)} \end{aligned}$$

$$= e^{n+p \left(\frac{t}{n+p} - \frac{t^2}{2(n+p)^2} + o\left(\frac{1}{(n+p)^2}\right)\right)} \cdot e^{n \left(\frac{t}{n} - \frac{t^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$P_{n+p}(t) - P_n(t) = e^{t - \frac{t^2}{2(n+p)} + o\left(\frac{1}{(n+p)^2}\right)} - e^{t - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= e^t \left[\left(1 - \frac{t^2}{2(n+p)} + o\left(\frac{1}{n+p}\right)\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right]$$

$$= e^t \left[\frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2(n+p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$|P_{n+p}(t) - P_n(t)| = e^t \left| \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2(n+p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, e^t \left| \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2(n+p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right| < \varepsilon$

Ainsi $|P_{n+p}(t) - P_n(t)| < \varepsilon$.

$\max_{t \in [0, 1]} |P_{n+p}(t) - P_n(t)| < \varepsilon$

$$\|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$$

d'où $(P_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy.

* Etude de sa limite.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n \left(\frac{t}{n} - \frac{t^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e \left(t - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^t \notin E. \end{aligned}$$

Donc la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas dans E .

Exercice 19

1) Un espace vectoriel normé est un $\mathbb{C}$ -espace si sa dimension est finie :

2) Observons que

$$(x_k) \xrightarrow{d} x \iff (x_k) \xrightarrow{\|\cdot\|} x.$$

En effet

$$(x_k) \xrightarrow{d} x \iff d(x, x_k) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|x - x_k\|}{1 + \|x - x_k\|} \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \|x - x_k\| \rightarrow 0 \text{ car } 1 + \|x - x_k\| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x_k) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$$

On en déduit que $(\mathbb{R}^n, d')$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sont homéomorphes.

• $B(0, 1) = \mathbb{R}^n$ n'est pas un compact de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ d'après 1). Il en résulte que $B(0, 1)$ n'est pas un compact de $(\mathbb{R}^n, d')$.

Donc $(\mathbb{R}^n, d')$ n'est pas un C-espace.

La notion de C-espace est ~~et~~ n'est pas topologique.

3) Supposons que toute partie fermée et bornée de E est un compact.

Soit $B(x_0, r)$ une boule fermée de E .

$B(x_0, r)$ est un fermé et borné donc un compact. Par conséquent (E, d) est un C-espace.

Reciproquement supposons que (E, d) est un C-espace.

Soit A une partie fermée et bornée de E . Alors

$\exists u \in A$ et $P > 0$ tels que $A \subset B(u, P)$

or $B(u, P)$ est compact donc A est un compact.

4) Supposons que (E, d) est un C-espace.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E .

Il existe une boule $B(x, r)$ fermée qui contient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette boule étant compacte, on peut extraire (propriété B.W) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

Reciproquement soit A une partie fermée et bornée de E . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A .

Comme A est bornée, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée.

On peut donc extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente vers $x \in E$. Comme A est fermé, $x \in A$.
Donc A est compact.

On en déduit d'après la proposition 39 que (E, d) est un C -espace.

Exercice 9

$$\ell^2_{\mathbb{R}} = \{ (u_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} u_n^2 < +\infty \}$$

K est un compact de $\ell^2_{\mathbb{R}}$.

Démontrons que K est une partie convexe et compacte de $\ell^2_{\mathbb{R}}$.

* La convexité.

$$[a, b] = \{ at + (1-t)b, t \in [0, 1] \}$$

$$\text{Soit } U = (u_1, \dots, u_n, \dots) \in K$$

$$V = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in K$$

$$\text{et } t \in [0, 1].$$

$$tU + (1-t)V = (tu_1 + (1-t)v_1, \dots, tu_n + (1-t)v_n, \dots)$$

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |v_n| \leq \frac{1}{n}.$$

$$|tu_n + (1-t)v_n| \leq |tu_n| + |(1-t)v_n|$$

$$\leq t|u_n| + (1-t)|v_n|$$

$$\leq \frac{t}{n} + \frac{(1-t)}{n}$$

$$|tu_n + (1-t)v_n| \leq \frac{1}{n}$$

Donc $tU + (1-t)V \in K$ d'où K est convexe.

* Compacité.

Soit $(U^p)_p$ une suite d'éléments de K qui converge vers $U \in \ell^2_{\mathbb{R}}$.

$$U^p = (u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p, \dots)$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \in \ell^2_{\mathbb{R}}$$

$$U^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} U \Rightarrow \|U^p - U\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}}^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \|U^p - U\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}}^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \|u_n^p - u_n\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\|u_n\| \leq \|u_n^p - u_n\| + \|u_n^p\| \leq \|u_n^p - u_n\| + \frac{1}{n}$$

n fixé.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|u_n^p - u_n\| = 0.$$

En tenant $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité

$$\|u_n\| \leq \|u_n^p - u_n\| + \frac{1}{n}$$

$$\text{on a } \|u_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

donc $u \in K$.

K est par conséquent un fermé de $\ell^2_{\mathbb{R}}$

* Montrons que K est borné.

soit $u \in K$

$$\|u\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\|u\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \text{ donc } K \text{ est bornée}$$

Soit $u \in K, \varepsilon > 0$

$$\|u\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}}^2 = \sum_{n=1}^N u_n^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^N u_n^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est le reste d'une série convergente

donc $\exists N \in \mathbb{N} / \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{4}$

Fixons un tel N et posons

$$\ell_N^2 = \{ u \in \ell^2_{\mathbb{R}} / u_n = 0 \forall n > N+1 \}$$

ℓ_N^2 est un sous espace de $\ell_{\mathbb{R}}^2$ de dimension finie
 N . ℓ_N^2 est donc uniforme de $\ell_{\mathbb{R}}^2$.
 $K \cap \ell_N^2$ est un compact, fermé borné de $\ell_{\mathbb{R}}^2$
 donc $K \cap \ell_N^2$ est un compact.
 $K \cap \ell_N^2$ est un précompact car compact.
 $\exists v_1, \dots, v_k \in K \cap \ell_N^2$ tels que
 $\forall v \in K \cap \ell_N^2, \exists i \in \{1, \dots, k\} /$
 $\|v - v_i\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$u \in K$
 $u = (u_1, u_2, \dots, u_N, 0, 0, \dots) + (0, \dots, 0, u_{N+1}, \dots)$
 $\exists j \in \{2, \dots, p_\varepsilon\} / \|u - v_j\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} \|u - v_j\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}^2 &= \|u - v + v - v_j\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}^2 \\ &\leq \|u - v\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}^2 + \|v - v_j\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u - v_j\| &\leq \|u - v\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit que K est précompact.
 K étant fermé et précompact dans $\ell_{\mathbb{R}}$, qui est
 complet, on en déduit que K est compact.

Exercice 8

(E, d) métrique, $A \subseteq E$, $D \subseteq E$

$A \subset \bar{D}$. Montrons que pour tout $\rho > 0$,

$(B_{\rho}(u))_{u \in D}$ est un recouvrement de A i.e. $A \subset \bigcup_{u \in D} B_{\rho}(u)$

Avec $B_{\rho}(u) = \{v \in E / d(u, v) < \rho\}$

Soit $a \in A$. Montrons que $a \in \bigcup_{u \in D} B_{\rho}(u)$

$a \in A \Rightarrow a \in \bar{D}$

$\Rightarrow \exists a_p \in D / d(a, a_p) < \epsilon$
 $\Rightarrow a \in B_{a_p}$
 $\Rightarrow a \in \bigcup_{u \in D} B_u$
 D'où le résultat.

Exercice 5 TD1

Montrons que $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$.

(i) On a bien $A \subset \bar{A} \Rightarrow \text{diam } A \leq \text{diam } \bar{A}$

(ii) Soient $x, y \in \bar{A}$

$x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A / x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

$y \in \bar{A} \Rightarrow \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A / y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $x_n, y_n \in A$ donc

$d(x_n, y_n) \leq \text{diam } A$

Comme l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue on a :

En passant à la limite,

$d(x, y) \leq \text{diam } A$

Ainsi $d(x, y) \leq \text{diam } A \quad \forall x, y \in \bar{A}$

Donc $\sup_{x, y \in \bar{A}} d(x, y) \leq \text{diam } A$ i.e. $\text{diam } \bar{A} \leq \text{diam } A$.

De (i) et (ii), on peut conclure que $\text{diam } \bar{A} = \text{diam } A$

Montrons que $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.

si $A \cap B \neq \emptyset$ ou $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$.

Soient $x, y \in A \cup B$

• $x, y \in A \Rightarrow d(x, y) \leq \text{diam } A \leq \text{diam } A + \text{diam } B$

• $x, y \in B \Rightarrow d(x, y) \leq \text{diam } B \leq \text{diam } A + \text{diam } B$

• $x \in A$ et $y \in B \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall z \in \bar{A} \cap B$

• si $A \cap B \neq \emptyset$ alors on prend $z \in A \cap B$ et on obtient $d(x, y) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.

ou $\text{diam } \bar{B} = \text{diam } B$.

on a donc $d(x, y) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.

Si $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ alors on prend $z \in \bar{A} \cap B$ et on obtient $d(x, y) \leq \text{diam } \bar{A} + \text{diam } B$.

ou $\text{diam } \bar{A} = \text{diam } A$.

on a donc $d(x, y) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.

Ainsi $\forall x, y \in A \cup B$, $d(x, y) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.

donc $d(A \cup B) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.

Exercice 10 TD1

1) Montrons que S est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall a, b \in \mathbb{R}^2$, $d(a, b) \geq 0$ car d est une distance
donc $S(a, b) \geq 0 \forall a, b \in \mathbb{R}^2$.

soit $a, b \in \mathbb{R}^2 / S(a, b) = 0$.

$S(a, b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d(a, b) = 0 \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont alignés avec } 0. \\ d(0, a) + d(0, b) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

* Si a et b sont alignés avec l'origine 0 alors $d(a, b) = 0$, entraîne que $a = b$ car d est une distance.

* Si a et b ne sont pas alignés avec l'origine
 $d(0, a) + d(0, b) = 0 \Rightarrow d(0, a) = 0$ et $d(0, b) = 0$
 $\Rightarrow \|a\| = 0$ et $\|b\| = 0$
 $\Rightarrow a = b = 0$.

Dans les deux cas $S(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

$S(a, a) = d(a, a) = 0$ car a est aligné avec 0 .
soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $S(a, b) = \begin{cases} d(a, b) \text{ si } a \text{ et } b \text{ alignés avec } 0 \\ d(0, a) + d(0, b) \text{ sinon.} \end{cases}$

$S(a, b) = \begin{cases} d(b, a) \text{ si } a \text{ et } b \text{ alignés avec } 0 \\ d(0, b) + d(0, a) \text{ sinon.} \end{cases}$

$= S(b, a)$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

* si a et b sont alignés avec l'origine 0 alors on a
$$S(a, b) = d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$
$$\leq S(a, c) + S(c, b)$$

Ainsi $S(a, b) \leq S(a, c) + S(c, b)$.

* si a, b ne sont pas alignés avec l'origine 0
1^{er} cas : si c et a sont alignés avec l'origine
alors c et b ne sont pas alignés avec 0 et on a

$$\text{on a : } S(a, b) = d(0, a) + d(0, b) \\ \leq d(0, c) + d(c, a) + d(0, b)$$

$$S(a, b) = d(a, c)$$

$$S(c, b) =$$

$$S(c, b) = d(0, c) + d(0, b)$$

$$S(a, c) + S(c, b) = d(a, c) + d(0, c) + d(0, b)$$

$$\text{Donc } S(a, b) \leq S(a, c) + S(c, b)$$

2^{ème} cas : si c et b sont alignés avec 0
alors c et a ne sont pas alignés avec 0 et on a

$$S(a, b) = d(0, a) + d(0, b) \\ \leq d(0, a) + d(0, c) + d(c, b) \\ \leq S(a, c) + S(c, b)$$

3^{ème} cas : c et b , c et a ne sont pas alignés avec 0 .

$$S(a, b) = d(0, a) + d(0, b) \\ \leq d(0, a) + d(0, c) + d(0, b) + d(a, c) \\ \leq S(a, c) + S(c, b)$$

Ainsi $S(a, b) \leq S(a, c) + S(c, b)$.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2$.

Conclusion S est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Soit O un ouvert de $(\mathbb{R}^2, d)$. Montrons que O est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, S)$. Soit $y \in O$. Il existe

$r > 0$ tel que $B_d(y, r) \subset O$.

Soit $x \in B_S(y, r)$. $d(x, y) \in S(x, y) < r \Rightarrow x \in B_d(y, r)$.

donc $B_S(y, r) \subset B_d(y, r) \subset O$. Donc O est voisin y .

Conclusion S est plus fine que d .

2) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Montrons que H est un ouvert.

soit $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto y$.

π est continue pour d car π est linéaire sur $\mathbb{R}^2$ et est de $\dim < \infty$.

On a $H = \pi^{-1}(]0, +\infty[)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour d .

On en déduit que H est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de S car S est plus fine que d .

Posons $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$.

$K^c = \pi^{-1}(]-\infty, 0])$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de S .

Donc K est fermé.

$H \subset K$. En effet $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$

$K = H \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$

soit $(x, y) \in K$

Exercice 2

$$T = \{0\} \times [-2, 1] \cup [-2, 1] \times \{0\}$$

1] Montrons que T est compact et connexe.

* Connexité.

$\{0\} \times [-2, 1]$ est un connexe de $\mathbb{R}^2$.

$[-2, 1] \times \{0\}$ est un connexe de $\mathbb{R}^2$.

De plus $(0, 0) \in \{0\} \times [-2, 1] \cap [-2, 1] \times \{0\}$.

$$\text{ie } \{0\} \times [-2, 1] \cup [-2, 1] \times \{0\} \neq \emptyset$$

Ainsi T est connexe comme union de connexes à intersection non vide.

* Compacité.

T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle. Ainsi T est un compact.

$f: T \rightarrow \mathbb{R}$ f continue.

Montrons que $f(T)$ est un segment.

Comme f est continue alors $f(T)$ est connexe car f est continu.

De plus $f(T)$ est compact. Ainsi $f(T)$ est un connexe compact de $\mathbb{R}$ donc un segment de $\mathbb{R}$.

2] soit $x = (x_1, x_2) \in T / T \setminus \{x\}$ est connexe.

* soit $x \in \{0\} \times [-2, 1]$.

$\{0\} \times [-2, 1] \setminus \{x\}$ est connexe.

Alors $x = (0, -1)$ ou $x = (0, 1)$.

* soit $x \in [-2, 1] \times \{0\}$.

Alors $x = (-2, 0)$ ou $x = (1, 0)$.

Ainsi si $x \in \{(0, -1), (0, 1), (-2, 0), (1, 0)\}$, $T \setminus \{x\}$ est connexe.

3) Montrons que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.
 Par absurde supposons que T est homéomorphe à $A \subset \mathbb{R}$. Alors il existe $f: T \xrightarrow{\sim} A$ une bijection telle que f et f^{-1} soient continues. Comme $A = f(T)$ alors A est un segment d'après 1) ie $\exists a, b \in \mathbb{R} / a < b$ et $A = [a, b]$.
 • $T \setminus \{(-1, 0)\}$ est connexe et f continue alors $f(T \setminus \{(-1, 0)\})$ est un connexe de $[a, b]$ donc $f(0, 1) \cup f(-2, 0) \in [a, b]$.
 Par un raisonnement analogue, on montre que $f(1, 0) \in [a, b]$, $f(0, -2) \in [a, b]$, $f(0, 1) \in [a, b]$ donc f n'est pas injective. Absurde car f est bijective. Ainsi T n'est pas homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 1

1) Supposons que X est connexe.
 Soit $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme X est connexe et f est continue alors $f(X)$ est un connexe de $\{0, 1\}$. Par conséquent $f(X) = \{0\}$ ou $f(X) = \{1\}$. Donc f est constante.
 Supposons que toute application continue $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
 Soient O_1 et O_2 deux ouverts de X tels que $X \subset O_1 \cup O_2$.
 Soit $\gamma_{O_1}(x): X \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\gamma_{O_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in O_1 \\ 0 & \text{si } x \in O_2 \end{cases}$$

τ_{01} est continue car les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\emptyset$.
 $\tau_{01}^{-1}(\{0\}) = O_2$ et $\tau_{01}^{-1}(\{1\}) = O_1$

$$\tau_{01}^{-1}(\{0, 1\}) = X, \quad \tau_{01}^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Par conséquent τ_{01} est constante (par hypothèse)
 $\tau_{01} \equiv 1$ ou $\tau_{01} \equiv 0$.

- $\tau_{01} \equiv 1 \Rightarrow O_1 \supset X$

- $\tau_{01} \equiv 0 \Rightarrow X \subset O_2$

Par suite $X \subset O_1$ ou $X \subset O_2$. Ainsi X est connexe.

2) Montrons que toute partie $B \subset E$ vérifiant $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

Soit $f: B \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue.
 - Montrons que f est constante.

$f: B \rightarrow \{0, 1\}$ continue alors la restriction de f sur A ,

$f_A: A \rightarrow \{0, 1\}$ est continue.

Mais A est connexe alors f_A est constante.
 disons $f_A = 1$

Soit $b \in B$. Comme $B \subset \bar{A}$ alors il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ / $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.
 Comme $a_n \in A$, alors

$$f(a_n) = f_A(a_n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme f est continue, on en déduit que $f(b) = 1$. Par conséquent f est constante sur B et B connexe d'après 1).

3) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite de parties connexes

de X telle que $A_n \cap A_{n+2} \neq \emptyset \quad \forall n \geq 0$
 prouvons que $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est connexe.
 soit $f: \bigcup_{n \geq 0} A_n \rightarrow \{0, 2\}$ une application
 continue.

Montrons que f est constante sur B .
 La restriction de f à $A_n \cap A_{n+2}$ est constante.
 $\exists (d_n)_n \subset \{0, 2\} \mid f_{A_n} = d_n$
 $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_{n+2} \neq \emptyset$ alors $\exists x_n \in A_n \cap A_{n+2}$
 $d_n = f_{A_n}(x_n) = f_{A_{n+2}}(x_n) = d_{n+2}$.

Donc $(d_n)_n$ est constante disons $\alpha \in \{0, 2\}$
 soit $b \in B$, alors $\exists n \in \mathbb{N} \mid b \in A_n$.
 $f(b) = f_{A_n}(b) = \alpha$. Donc f est constante sur B .
 Par conséquent $B = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ est connexe.

Exercice 3

1.) Montrons que A est une partie connexe
 de $\mathbb{R}^2$.

soit $(x, y), (x', y') \in A$.

Posons $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (1-t)(x, y) + t(x', y')$$

on a:

- $\gamma(0) = (x, y)$

- $\gamma(1) = (x', y')$

- $\forall t \in]0, 2[, \gamma(t) \in A$.

donc γ est un chemin de A qui relie (x, y) à
 (x', y') dans A .

Ainsi A est connexe car connexe par arc.

2) Pour $(x, y) \in A$. Posons $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$
 Montrons que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$
 * $t \in g(A)$, $\exists (x, y) \in A / g(x, y) = t = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$
 $t = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$; comme f est dérivable

sur $]x, y[$, par le TAF, $\exists \xi \in]x, y[/$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$$

d'où $t = f'(\xi) \in f'(I)$ d'où $g(A) \subset f'(I)$

soit $t \in f'(I)$, $\exists y \in I / t = f'(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ (x, y) \in A}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

$$t = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} g(x, y)$$

donc $t \in \overline{g(A)}$ d'où $f'(I) \subset \overline{g(A)}$

Devoir de Topologie
Durée : 3 heures

Exercice 1. (2+1+1+1+1)pts

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace localement compact, $\omega \notin E$ et $E' = E \cup \{\omega\}$.
On définit

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{K^c, K \text{ compact de } E\}$$

où K^c désigne le complémentaire de K dans E .

- (1) Montrer que $(E', \mathcal{O}')$ est un espace topologique.
- (2) Montrer que $(E', \mathcal{O}')$ est séparé.
- (3) Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E' . Montrer qu'il existe i_0 tel que $U_{i_0} = (E - K) \cup \{\omega\}$ où K est un compact de E .
- (4) Dédurre de la question précédente que E' est compact.
- (5) Montrer que si E n'est pas compact alors $\bar{E} = E'$.

Exercice 2. (2+3+(1+1)+1)pts

Soient E un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On note par $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et par $B'(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r .

- (1) Montrer que

$$y \in B'(x, r) \implies y = \lim_n \left(x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x) \right).$$

En déduire que l'adhérence de $B(x, r)$ est $B'(x, r)$.

- (2) En s'inspirant de la question précédente, montrer que l'intérieur de $B'(x, r)$ est $B(x, r)$.
- (3) On considère maintenant $\mathbb{R}$ muni de la distance discrète d et $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Déterminer $B(x, 1)$ puis son adhérence.
 - (b) Déterminer $B'(x, 1)$ puis son intérieur.
- (4) Quelle conclusion peut-on tirer de toutes ces questions ?

Exercice 3. (1+1+1+(1+2))pts

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in E$. On rappelle que la *composante connexe* de x notée $C(x)$ est la plus grande partie connexe de E contenant x .

- (1) Montrer que $\forall x \in E, C(x)$ est fermé.
- (2) Montrer que E est connexe si et seulement si $\forall x \in E, C(x) = E$.
- (3) Montrer que si E a un nombre fini de composantes connexes alors pour tout $x \in E, C(x)$ est à la fois ouverte et fermée.
- (4) Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit *totalelement discontinu* si

$$\forall x \in E, C(x) = \{x\}$$

- (a) L'espace $\mathbb{Q}$ est-il totalelement discontinu ? Justifiez brièvement votre réponse.
- (b) L'espace $(E = \{a, b, c, d\}, \mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}, E\})$ est-il totalelement discontinu ? Justifiez votre réponse.

exo 1 $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \left\{ \bigcap_{E'} K, K \text{ compact de } E \right\}$.

①. $\phi \in \mathcal{O}'$ car $\phi \in \mathcal{O}$.

$\left\{ \begin{array}{l} E' = \bigcap_{E'} \phi \\ \phi \text{ compact de } E \end{array} \right\} \mapsto E' \in \mathcal{O}'$

• $u, v \in \mathcal{O}'$

1^{er} cas $u, v \in \mathcal{O} \Rightarrow u \cap v \in \mathcal{O} \Rightarrow u \cap v \in \mathcal{O}'$.

2^{er} cas $u = \bigcap_{E'} K; v = \bigcap_{E'} L$

$u \cap v = \bigcap_{E'} (K \cap L) \in \mathcal{O}'$ car la réunion de 2 compacts est compact.

3^{er} cas $u \in \mathcal{O}, v = \bigcap_{E'} K$

$u \cap \bigcap_{E'} K = u \cap \bigcap_{E'} K \in \mathcal{O}$ car

K compact donc $\bigcap_{E'} K$ ouvert de $\mathcal{O}$.
(so les exp. dérivés, tout compact est fermé).

• $\bigcup_i u_i \in \mathcal{O}$

$\bigcup_j \bigcap_{E'} K_j \in \mathcal{O}'$ car non-évident pour la stabilité
réunion q.f.g.

• $\forall u \in \mathcal{O}$ et $\bigcap_{E'} K \in \mathcal{O}' \Rightarrow u \cup \bigcap_{E'} K \in \mathcal{O}'$

$u \cup \bigcap_{E'} K = \bigcap_{E'} (u \cup K)$

et $\bigcap_{E'} u \cap K$ fermé de K compact

donc $\bigcap_{E'} (u \cap K)$ compact de E . $\sum$

il suffit de voir w est séparée des pts de $\bar{E}$ car $\bar{E}$ est fermé.
 Si $x \in \bar{E}$, il existe un voisinage compact K et $K \subset \bar{E}$.
 donc $\bigcap_{\bar{E}} K \in \mathcal{O}(w)$ et $K \cap \bigcap_{\bar{E}} K = \emptyset$.

③ si $i \in \mathbb{I}$, on a $U_i \in \mathcal{O}$ alors on a $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i \subset E$.
 donc $\exists i_0 : U_{i_0} = \bigcap_{\bar{E}'} K$ et $K \subset \bigcup_{j \neq i_0} U_j$

K étant compact on a $K \subset \bigcup_{j=1}^n U_{j_2}$ et

$$E' = U_{i_0} \cup \bigcup_{j=1}^n U_{j_2} \quad \text{recouvrement fini de } E'.$$

④ E non compact et $\forall e \in \mathcal{O}(w)$ alors
 $\forall \geq \bigcap_{\bar{E}'} K$ avec $K \neq \bar{E}$. donc $\forall \cap \bar{E} \neq \emptyset$.

$$B(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| < r\}$$

$$B'(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$$

①. $y \in B'(x, r) \Leftrightarrow \|x - y\| \leq r$.

$$\begin{aligned} \|y - y_n\| &= \|(y - x)(1 - (1 - \frac{1}{n}))\| \\ &= \frac{1}{n} \|y - x\| \leq \frac{r}{n} \end{aligned}$$

• $\forall y \quad \overline{B(x, r)} = B'(x, r)$.

• $B'(x, r)$ est un fermé contenant $B(x, r)$
 donc $B(x, r) \subset B'(x, r)$.

• $y \in B'(x, r) \Rightarrow y = \lim_n y_n$ d'après le point.

x plus $y_n \in B(x, r)$ car :

$$\begin{aligned} \|y_n - x\| &= \|(1 - \frac{1}{n})(y - x)\| = (1 - \frac{1}{n}) \|y - x\| < r \\ \text{car } 1 - \frac{1}{n} &< 1 \\ \|y - x\| &\leq r \end{aligned}$$

②. $\forall y \quad \overline{B'(x, r)} = B(x, r)$.

• $B(x, r)$ est un ouvert contenant $B'(x, r)$
 donc $B(x, r) \subset \overline{B'(x, r)}$.

• $\forall y \quad (B(x, r))^c \subset \overline{(B'(x, r))^c} = \overline{B'(x, r)^c}$
 par passage au complémentaire.

prendre $z \in (B(x, r))^c$ et $\forall y$

$$\begin{cases} z = \lim_n z_n \text{ avec } z_n = x + (1 + \frac{1}{n})(z - x) \\ \|z_n - x\| = \|(1 + \frac{1}{n})(z - x)\| \geq r \end{cases}$$

d'où $z_n \in (B'(x, r))^c$.

$(\mathbb{R}, \text{distance discrète})$, $x \in \mathbb{R}$.

$$a) B(x, 1) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < 1\} \\ = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) = 0\}$$

$$B(x, 1) = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}.$$

$$b) B'(x, 1) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) \leq 1\} \\ = \mathbb{R} \Rightarrow \overline{B'(x, 1)} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

(d définit la topologie discrète).

④ conclusion

la question ③ montre que $\overline{B(x, r)} = B'(x, r)$ et les

$$\overline{B'(x, r)} = B(x, r)$$

$(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ n'est plus vrai dans $(\mathbb{R}, d)$.

Nuance entre une
space métrique et espace normé.

$C(x)$ connexe $\Rightarrow \overline{C(x)}$ connexe

$\cap C(x)$ est le plus grand connexe contenant x .

Donc $C(x) = \overline{C(x)}$ et $C(x)$ fermé.

② E connexe $\Rightarrow C(x) = E$ plus grand connexe contenant x .
($\Leftarrow$) évident.

③ soit $C(x_1) \dots C(x_n)$ les composantes connexes de E .

$\forall x \in E; \exists i \in [1, n] \text{ tq } C(x) = C(x_i) \text{ fermé}$.

Le plus $C(x) = \bigcup_{j \neq i} C(x_j)$ réunion finie de fermés
et fermé.

Donc $C(x)$ ouvert.

④ a) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow C(x) =]x, x[$.

$]x, x[$ est le seul intervalle contenant x et inclus ds $\mathbb{R}$
(les connexes de $\mathbb{R}$ sont aussi les connexes de $\mathbb{R}$
donc les intervalles).

b) $C(a) = C(b) =]a, b[$. // donc $(\mathbb{R}, \theta)$ n'est pas
totalment discontinu.
 $C(c) =]c, c[$.

Examen de topologie**Durée : 3 heures**

NB : La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (8 points)

1) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n réels et $\varphi : E \rightarrow F$ une application additive et bornée au sens suivant :

- (a) $\forall u, v \in E : \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.
 (b) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \|u\|_E \leq 1 \implies \|\varphi(u)\|_F \leq \alpha$.

Démontrez que φ est une application linéaire continue.

2) On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Soit $\Phi : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \forall v \in E : \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|_F \leq M$
 (ii) $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \|u\|_E \leq 1 \implies \|\Phi(u)\|_F \leq C$.

2.1) Démontrez que pour tout $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(1) \quad \left\| \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u) - \Phi(u) \right\|_F \leq \frac{M}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire que pour tout $u \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \Phi(2^n u)$ existe dans F . On note $A(u)$ cette limite.

2.2) Démontrez que l'application $A : E \rightarrow F, u \mapsto A(u)$ vérifie $\forall u, v \in E : A(u+v) = A(u) + A(v)$.

2.3) Démontrez que $\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - A(u)\|_F \leq M$. Déduisez-en que A est une application linéaire continue.

2.5) Démontrez qu'il n'existe qu'une seule application linéaire continue vérifiant cette inégalité.

Exercice 2 (4 points)

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E . Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne sur A :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall a \in A, \forall b \in A : |f(a) - f(b)| \leq \lambda d(a, b).$$

Pour tout $a \in A$ et pour tout $u \in E$, on pose

$$f_a(u) := f(a) + \lambda d(a, u), \text{ puis } g(u) := \inf \{ f_a(u) \mid a \in A \}.$$

Démontrez que g est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à A est égale à f et qui vérifie

$$\forall u \in E, \forall v \in E : |g(u) - g(v)| \leq \lambda d(u, v).$$

Commenter ce résultat !

Exercice 3 (4 points)

Soit $E = C_\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et A le sous-ensemble de E défini par

$$E := \left\{ f \in E \mid f \geq 0, \text{ } f \text{ décroît sur } [0; 1], 1 \leq f(0) \leq 2, \int_0^1 f(t) dt = f(0) - 1 \right\}.$$

Par exemple $t \mapsto -2t + 2$ appartient à E .

- 1) Démontrer que A est une partie convexe, complète, bornée de E .
- 2) Démontrer que $d(0, A) = 1$ et que l'ensemble des projetés de 0 sur A est vide.

Exercice 4 (4 points)

Soit $X = (C^1([0, 1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.